



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

ANSSI RISTIMÄKI

PARTIKKELISILOITUSTA SISÄTILAPAIKANNUKSESSA

Diplomityö

Tarkastajat: TkT Simo Ali-Löytty ja

Prof. Robert Piché

Tarkastajat ja aihe hyväksytty

Luonnontieteiden ja ympäristötekniikan  
tiedekunnan kokouksessa 15.8.2012.

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

**RISTIMÄKI, ANSSI JOHANNES: Partikkelisiloitusta sisätilapaikannuksessa**

Diplomityö, 68 sivua, 6 liitesivua

Toukokuu 2013

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: TkT Simo Ali-Löytty ja professori Robert Piché

Avainsanat: sisätilapaikannus; bayeslaiset estimointimenetelmät; partikkelisuodatus; partikkelisiloitus

Verrattuna käyttäjän tai vastaanottimen paikantamiseen ulkona, sisätilapaikannuksessa vaaditaan erityistä tarkkuutta, jotta käyttäjä voidaan paikantaa esimerkiksi oikeaan huoneeseen. Partikkelisuodatinta käytetään yleisesti paljon sisätilapaikannuksessa käyttäjän paikan estimointiin. Tässä työssä sovelletaan partikkelisiloitusmenetelmiä sisätilapaikannukseen.

Työssä esitellään bayeslaisen estimoinnin teoriaa partikkelisuodattimen teorian pohjustamiseksi. Lisäksi siloituksesta ja erityisesti bayeslaisesta siloituksesta on työssä oma lukunsa, jonka lopuksi käydään läpi partikkelisiloitusmenetelmiä. Sisätilapaikannusongelman matemaattisesta mallintamisesta on myös työssä oma kappaleensa.

Tässä työssä partikkelisiloitusmenetelmiä testataan sekä simulaatioissa, että oikeilla mittauksilla käyttäen kulmanmuutos-, askel- sekä WLAN-mittauksia. Myös karttatieto huomioidaan kuljetun reitin estimoinnissa. Tässä työssä alkutila ja oikea kerros oletetaan tunnetuiksi. Simulaatioissa, jossa ei oteta huomioon karttatietoa, havaitaan tarkasteltavilla partikkelisiloitusmenetelmillä estimoitujen reittien olevan lähellä teorian mukaista Rauch-Tung-Striebel siloittimen analyttistä ratkaisua. Simulaatioiden sekä todellisten testitapausten perusteella havaitaan, että partikkelisiloitusmenetelmien avulla on mahdollisuus ottaa reitin estimoinnissa paremmin huomioon karttarajoitteet, kuin partikkelisuodatuksessa. Testien perusteella tehdään huomioita myös työssä käytettyjen partikkelisiloitusmenetelmien käytännön toteutuksesta, menetelmien estimaattien konsistenttiudesta, laskentaintensiivisyydestä sekä muistinkulutuksesta.

# ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

**RISTIMÄKI, ANSSI JOHANNES: Particle smoothing in indoor positioning**

Master of Science Thesis, 68 pages, 6 Appendix pages

May 2013

Major: Mathematics

Examiners: D.Tech. Simo Ali-Löytty and Prof. Robert Piché

Keywords: indoor positioning; Bayesian estimation; particle filtering; particle smoothing

Higher accuracy is demanded for estimating the position of user or device in indoor environments compared to outdoors. Particle filtering is widely used for estimating the track of the user in indoor positioning. In this thesis particle smoothing methods are implemented in the indoor positioning framework.

In the theory part of the thesis Bayesian estimation methods are discussed from Kalman filter to sequential Monte Carlo methods. Smoothing is covered in its own chapter also especially from the Bayesian point of view, finishing with presentations of particle smoothers.

Particle smoothing methods are tested in simulations and also with real data. Step detection, measurements of angular changes and WLAN-measurements are used for estimating the state of the user. Map information is also taken into account. The initial state and correct floor are assumed to be known. In a simulation where map information is excluded the particle smoothing methods get close to the optimal solution of Rauch-Tung-Striebel smoother. It is found that compared to particle filtering, particle smoothing methods can take into account map information more effectively. Based on the tests some observations are also made from the implementation perspective as well as from the consistency, computational complexity and memory requirements of the implemented particle smoothers.

# Alkusanat

Tämä työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston henkilökohtaisen paikannuksen tutkimusryhmässä. Aloitin työn kesällä 2012, jolloin aloitin ryhmässä kesäharjoittelijana. Kesän jälkeen sain jatkaa ryhmässä osa-aikaisesti tutkimusapulaisena Nokian rahoittamassa projektissa ja projektissa työskenteleminen on tukenut myös diplomityön tekemistä. Työn aihe on ollut haastava, mutta sen liittyminen käytäntöön on tehnyt siitä erittäin mielenkiintoisen.

Haluan kiittää professori Robert Pichéä ja TkT Simo Ali-Löyttyä mahdollisuudesta työskennellä paikannusryhmässä, sekä kommentteista ja korjausehdotuksista työn tarkastusvaiheessa. Lisäksi tahdon kiittää Ali-Löyttyä asiantuntevasta ja kannustavasta ohjauksesta koko työn tekemisen ajalta. Suuri kiitos kuuluu myös työkavereileni Henri Nurmiselle ja Toni Fadjukoffille keskusteluista ja neuvoista työn teoriaan sekä MATLAB-toteutuksiin liittyen. Kiitän myös muita paikannusryhmäläisiä mukavasta työilmapiiristä.

Erityiskiitos kuuluu myös vaimolleni Niinalle kaikesta tuesta kotona. Tahdon kiittää myös vanhempiani, sisaruksiani sekä vaimoni vanhempia kannustuksesta opinnoissa. Lopuksi tahdon kiittää Luojaani.

Tampere, 22th May 2013

Anssi Ristimäki  
Insinöörinkatu 66 A 17  
33720 Tampere

# Sisältö

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Johdanto</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Sisätilapaikannuksen menetelmistä ja algoritmeista . . . . . | 5         |
| 1.2      | Työn rakenne . . . . .                                       | 8         |
| <b>2</b> | <b>Suodatus</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Ongelman asettelu . . . . .                                  | 10        |
| 2.2      | Bayeslainen suodatus . . . . .                               | 11        |
| 2.3      | Kalmanin suodatin . . . . .                                  | 13        |
| 2.4      | Sekventiaaliset Monte Carlo menetelmät . . . . .             | 14        |
| 2.4.1    | Monte Carlo integrointi . . . . .                            | 15        |
| 2.4.2    | Painotuspoiminta . . . . .                                   | 15        |
| 2.4.3    | Sekventiaallinen painotuspoiminta . . . . .                  | 16        |
| 2.4.4    | Uudelleennäytteistys . . . . .                               | 17        |
| 2.4.5    | Ehdokasjakauman valinnasta . . . . .                         | 18        |
| 2.5      | Partikkelisuodatin . . . . .                                 | 19        |
| <b>3</b> | <b>Siloitus</b>  | <b>20</b> |
| 3.1      | Siloituksen taustaa . . . . .                                | 20        |
| 3.2      | Bayeslainen siloitus . . . . .                               | 22        |
| 3.3      | Rauch-Tung-Striebel siloitin . . . . .                       | 23        |
| 3.4      | Kahden suodattimen kaava . . . . .                           | 24        |
| 3.5      | Partikkelisiloitusmenetelmiä . . . . .                       | 26        |
| 3.5.1    | Suodatinsiloitin . . . . .                                   | 26        |
| 3.5.2    | Eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus . . . . .             | 27        |
| 3.5.3    | Yleistetty kahden suodattimen kaava . . . . .                | 29        |
| 3.5.4    | Ehdokasjakauman ja keinotekoisen jakauman valinnasta . . .   | 34        |
| <b>4</b> | <b>Tila- ja mittausmallit</b>                                | <b>36</b> |
| 4.1      | Kävelijän liikkeen mallintaminen . . . . .                   | 36        |
| 4.2      | Lineaarinen tilamalli . . . . .                              | 39        |
| 4.3      | Mittausmalli . . . . .                                       | 40        |
| <b>5</b> | <b>Tulokset</b>  | <b>41</b> |
| 5.1      | Partikkelisiloitusmenetelmien testaaminen . . . . .          | 41        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.2      | Mallit, sekä ehdokas- ja keinotekoiset jakaumat simulaatioissa . . . .  | 41        |
| 5.3      | Simulaatio ilman karttatietoa . . . . .                                 | 44        |
| 5.4      | Simulaatiot karttatietoa käyttäen . . . . .                             | 47        |
| 5.5      | Laskenta-aika ja muistinkulutus . . . . .                               | 53        |
| 5.6      | Mallit ja ehdokasjakaumat testeissä todellisilla mittauksilla . . . . . | 54        |
| 5.7      | Partikkelisiloituksen testaaminen todellisilla mittauksilla . . . . .   | 56        |
| 5.8      | Huomioita . . . . .   | 62        |
| <b>6</b> | <b>Yhteenveto</b>   | <b>64</b> |
|          | Viitteet . . . . .  | 66        |
| <b>A</b> | <b>Rauch-Tung-Striebel siloittimen todistus</b>                         | <b>69</b> |

# Lyhenteet

|           |   |
|-----------|---|
| GPS       | Yhdysvaltain puolustusministeriön ylläpitämä maailmanlaajuinen paikannusjärjestelmä (Global Positioning System) |
| WLAN/WiFi | langaton lähiverkko (Wireless Local Area Network)   |
| RFID      | radiotaajuinen tunnistustekniikka (Radio Frequency Identification)  |
| PDR       | menetelmä, jossa käyttäjä tai laite paikannetaan inertiamittauksiin perustuen (Pedestrian Dead Reckoning)       |
| IMU       | inertiamittausyksikkö (Inertial Measurement Unit)   |
| RSS       | vastaanotetun signaalin voimakkuus (Received Signal Strength)   |
| MAC       | MAC-osoite, verkkosovittimen yksilöllinen tunniste (Media Control Access)                                       |
| FS        | suodatinsiloitin (filter-smoother, SIR-smoother)  |
| FFBS      | eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus (Forward Filtering-Backward Smoothing)                                   |
| GTFF      | yleistetty kahden suodattimen kaava (Generalized Two-filter Formula)  |
| RTS       | Rauch-Tung-Striebel siloitin, jota kutsutaan myös Kalmanin siloittimeksi (Rauch-Tung-Striebel Smoother)         |
| TFF       | kahden suodattimen kaava (Two-filter Formula)   |
| KF        | Kalmanin suodatin (Kalman filter)   |
| MC        | Monte Carlo menetelmä (Monte Carlo method).   |
| SMC       | sekventiaalinen Monte Carlo menetelmä (Sequential Monte Carlo method)   |
| PF        | partikkelisuodatin (particle filter)  |
| SIR       | toinen lyhenne partikkelisuodattimelle (Sequential Importance Resampling)                                       |
| ESS       | efektiivinen näytteen lukumäärä (Effective Sample Size)   |

|       |  |
|-------|--|
| BIF   | informaatio-suodatin aikasarjassa taaksepäin<br>(Backward Information filter)                      |
| GBIF  | informaatiopartikkelisuodatin aikasarjassa taaksepäin<br>(Generalized Backward Information filter) |
| ENU   | paikallinen itä, pohjoinen, ylös-koordinaatisto<br>(Local east, north, up coordinates)             |
| TTY   | Tampereen teknillinen yliopisto<br>(Tampere University of Technology)                              |
| BSSID | langattomassa lähiverkossa lähetettävä tukiaseman tunnus<br>(Base Service Set Identifier)          |



# Merkinnot

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $\Omega$                     | otosavaruus   |
| $F$                          | otosavaruuden tapahtumien joukko  |
| $P$                          | otosavaruuden tapahtumiin liittyvä todennäköisyys   |
| $\mathbb{R}$                 | reaalilukujen joukko  |
| $\mathbf{x}$                 | satunnaismuuttuja (myös vektoriarvoinen)  |
| $\mathbf{x}_t$               | stokastisen prosessin tila ajanhetkellä $t$   |
| $\{\mathbf{x}_t\}$           | stokastinen prosessi  |
| $f_t, h_t$                   | ajanhetken $t$ tilansiirto- ja mittausfunktio   |
| $\mathbf{w}_t, \mathbf{v}_t$ | ajanhetken $t$ tila- ja mittausmallin kohina  |
| $Q_t, R_t$                   | ajanhetken $t$ tila- ja mittausmallin kohinan kovarianssimatriisi   |
| $p(\mathbf{x} \mathbf{y})$   | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ tiheysfunktio ehdolla $\mathbf{y} = \mathbf{y}$ , missä $\mathbf{y}$ on satunnaismuuttujan $\mathbf{y}$ realisaatio |
| $y_{1:t}$                    | mittaukset $y_1, y_2, \dots, y_t$   |
| $p(\mathbf{x}_t y_{1:k})$    | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}_t$ tiheysfunktio ehdolla mittaukset $y_{1:k}$  |
| $m_t, P_t$                   | ajanhetken $t$ posteriorijakauman odotusarvo ja kovarianssimatriisi   |
| $m_t^-, P_t^-$               | ajanhetken $t$ priorijakauman odotusarvo ja kovarianssimatriisi   |
| $K_t$                        | ajanhetken $t$ Kalmanin vahvistus   |
| $\mathbb{E}(\mathbf{x})$     | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ odotusarvo  |
| $\mathbb{V}(\mathbf{x})$     | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ kovarianssimatriisi   |
| $\mathbf{x} \sim N(m, P)$    | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ jakauma on normaali parametrein $m$ ja $P$  |
| $N(\mathbf{x} m, P)$         | satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ tiheysfunktio, kun $\mathbf{x} \sim N(m, P)$  |
| $F$                          | tilansiirtomatriisi tai tilansiirtofunktion Jacobin matriisi  |
| $H$                          | mittausmatriisi.  |
| $x_t^i$                      | ajanhetken $t$ partikkeli $i$ partikkelisuodatuksessa aikasarjassa eteenpäin  |
| $w_t^i, W_t^i$               | ajanhetken $t$ partikkelin $i$ normalisoimaton ja normalisoitu paino partikkelisuodatuksessa aikasarjassa eteenpäin                                 |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $q(x)$                         | ehdokasjakauma partikkelisuodatukseen aikasarjassa eteenpäin   |
| $\delta(x)$                    | Diracin deltafunktio   |
| $\text{ess}_k$                 | efektiivisen näytteiden määrän kynnysarvo uudelleennäytteistykseen   |
| $m_t^s, P_t^s$                 | ajanhetken $t$ siloitusjakauman jakauman odotusarvo ja kovarianssimatriisi   |
| $z_t^-, z_t$                   | informaatio-suodattimen priorin ja posterioritilan odotusarvot   |
| $Z_t^-, Z_t$                   | informaatio-suodattimen priorin ja posterioritilan kovarianssimatriisit  |
| $\tilde{p}(x)$                 | ns. keinotekoinen jakauma (Artificial distribution)  |
| $\tilde{x}_t^i$                | ajanhetken $t$ partikkeli $i$ partikkelisuodatuksessa aikasarjassa taaksepäin  |
| $\tilde{w}_t^i, \tilde{W}_t^i$ | ajanhetken $t$ partikkelin $i$ normalisoimaton ja normalisoitu paino partikkelisuodatuksessa aikasarjassa taaksepäin |
| $\tilde{q}(x)$                 | ehdokasjakauma partikkelisuodatukseen aikasarjassa taaksepäin  |

# Luku 1

## Johdanto

### 1.1 Sisätilapaikannuksen menetelmistä ja algoritmeista

Yksi sisätilapaikannuksen haasteista on määrittää käyttäjän tai vastaanottimen paikka sisätiloissa. Yksityisille käyttäjille paikannus ulkona on tällä hetkellä tutumpaa kuin sisätiloissa, esimerkiksi autonavigaattoreiden ja kännyköihin tarjolla olevien navigointiominaisuuksien myötä. Viimeisen parinkymmenen vuoden ajan sisätilapaikannusta on tutkittu kasvavassa määrin [4]. Vastaanottimen paikantamiseen sisätiloissa liittyy omat erityiset haasteensa. Sisätiloissa käyttäjän paikka on pystytävä paikantamaan tarkasti, vähintään muutaman metrin tarkkuudella. Esimerkiksi ulkona kymmenen metrin tarkkuus saattaa riittää paikannustarkkudeksi, mutta sisätiloissa vastaavalla tarkkuudella ei välttämättä voida määrittää missä huoneessa käyttäjä on. Erityispiirre sisätiloissa tapahtuvaan paikannukseen on myös se, että käyttäjä on pystytävä paikantamaan oikeaan kerrokseen. Lisäksi sisätilapaikannuksessa rakennuksen rakenteet asettavat omat haasteensa paikannusalgoritmeille, sekä paikannukseen käytettävälle tekniikalle [23, s. 7-8].

Tekniset sovellukset ulkona tapahtuvaan paikannukseen on mahdollistanut satelliit-tipaikannus (esim. GPS), jonka avulla käyttäjän sijainti ulkona voidaan paikantaa ulkopaikannukseen riittävällä tarkkudella. Sisätilapaikannukseen ei ole vastaavanlaista standardimenetelmää ja useita menetelmiä onkin tutkittu. Tutkitut mittausmenetelmät voidaan karkeasti jakaa kahteen kategoriaan. Ensiksi menetelmiin, jotka tarvitsevat paikannusta varten rakennuksen sisään sijoitettua tekniikkaa ja toiseksi menetelmiin, jotka toimivat itsenäisesti tai hyödyntävät rakennuksissa valmiina olevaa tekniikkaa [19]. Ensimmäiseen kategoriaan voidaan luokitella esimerkiksi Bluetooth- tai Ultra-Wideband-signaalien hyödyntäminen [23, s. 69 ja 84]. Toiseen kategoriaan voidaan puolestaan luokitella esimerkiksi inertiamittauksiin tai WLAN-signaaleihin perustuva paikannus [23, s. 57-59, 92-94]. Eri mittausmenetelmien paikannustarkkuus vaihtelee rakennuksen sisällä vastaanottimen sijainnista riippuen. Esimerkiksi WLAN-signaaleihin perustuvalla paikannuksella päästään sitä tarkempaan tulokseen, mitä enemmän tukiasemia on vastaanottimen lähellä eri suunnissa. Erilaisten sisätilaympäristöjen huomioimiseksi voidaan yhdistää erilaisia mittausmenetelmiä, jolloin käyttäjä pystytään paikantamaan paremmin rakennuksessa [18]. Muutamia mittausmenetelmiä, niiden tyypillisten tarkkuuksien suuruusluokat sekä kattavuudet on listattu taulukkoon 1.1.

Taulukko 1.1: Sisätilapaikannuksessa käytettäviä menetelmiä, niiden tyypilliset tarkkuuksien suuruusluokat ja kattavuudet [23, s. 9, 57, 84, 93]. Kattavuudella tarkoitetaan tässä yhden kameran toimintasädettä tai langattoman verkon tukiaseman kantamaa. Inertiamittausten tarkkuudella tarkoitetaan estimoidun reitin virheen sekä reitin pituuden suhdetta prosenteissa ja kantamalla puolestaan tarkoitetaan arviota reitin pituudesta, jolla käyttäjä pystytään paikantamaan pelkästään inertiamittausten perusteella (PDR).

| menetelmä         | tarkkuus | kattavuus [m] |
|-------------------|----------|---------------|
| kamera            | 0.1mm-dm | 1-10          |
| WLAN/WiFi         | m        | 50-100        |
| RFID              | dm-m     | 1-50          |
| Ultra-Wideband    | cm-m     | 1-50          |
| pseudoliitit      | cm-dm    | 10-1000       |
| Bluetooth         | m        | 5-10          |
| inertiamittaukset | 0.1-20%  | 10-100        |

Tässä työssä paikannukseen käytetään inertia- sekä WLAN-mittauksia. Inertiamittausyksikkö (IMU) koostuu tyypillisesti kolmesta toisiinsa nähden kohtisuorassa olevasta kiihtyvyysanturista, kolmesta gyroskoopista ja mahdollisesti magnetometrasta [23, s. 92]. Kiihtyvyysanturien mittausdataa voidaan käyttää esimerkiksi askeleiden tunnistamiseen [7, s. 78-80], [10, s. 5] ja gyroskoopeilla voidaan mitata kulmanmuutosta käyttäjän liikesuunnassa. Mikäli käyttäjän alkupaikka ja -suunta tunnetaan, niin askel- ja kulmanmuutosmittausten avulla voidaan estimoida käyttäjän

paikkaa, askelpituutta ja suuntaa aikasarjassa PDR-menetelmällä (Pedestrian Dead Rackoning) [20, s. 16-18]. PDR soveltuu siinä mielessä hyvin käytettäväksi sisätilapaikannukseen kannettavissa laitteissa, että IMU toimii itsenäisesti ja se voidaan kokonsa puolesta integroida esimerkiksi matkapuhelimiin [22]. PDR:n ongelma on gyroskoopin mittausten virhealttius, eikä sitä voida pitkällä aikavälillä käyttää yksistään käyttäjän paikantamiseen [24, s. 176] ja tämän vuoksi sen lisäksi käytetäänkin yleensä myös muita menetelmiä.

WLAN-mittauksia käytetään yleisesti sisätilapaikannuksessa, sillä tukiasemia on yleensä rakennuksissa valmiina. WLAN-paikannukseen käytetään usein signaalin voimakkuuden mittauksia (RSS), kun tiedossa on malli signaalin vaimenemiselle (Path loss model). Mitattuja RSS-arvoja voidaan käyttää paikannukseen esimerkiksi sormenjälkimenetelmällä (Fingerprinting), joka voidaan jakaa ns. opetusvaiheeseen ja paikannusvaiheeseen. Opetusvaiheessa muodostetaan radiokartta rakennuksen eri pisteissä kuulluista tukiasemien RSS-arvoista, sekä tukiasemien tunnuksista. Radiokarttaan tallennetaan kullekin mittauspisteelle, kuullut tukiasemat, tukiasemille mitatut RSS-arvot sekä tukiasemien MAC tunnukset. Paikannusvaiheessa kuultuja tukiasemien voimakkuuksia verrataan radiokarttaan ja estimoidaan käyttäjän paikka. [13],[23, s. 58]

Tekniikan lisäksi tarkkaan ja tehokkaaseen sisätilapaikannukseen tarvitaan hyviä algoritmeja ja tässä työssä keskitytäänkin partikkelisiloitusmenetelmiin, joilla estimoidaan sisätilassa kuljettua reittiä käyttäen koko reitille tallessa olevaa mittausdataa, sekä partikkelisiluodattimen estimoimaa reittiä. Partikkelisiloitusmenetelmiä tarkastellaan tasossa, eli oletuksena on, että useampikerroksisessa rakennuksessa kerros on tiedossa. Lisäksi oletetaan, että alkupaikka ja suunta sekä askelpituus ovat tiedossa. Tässä työssä paikannuksen lähtökohtana on, että vastaanottimen tilaa, joka sisältää paikkatiedon, mallinnetaan satunnaismuuttujana. Lisäksi askel-, kulmanmuutos- ja WLAN-mittaukset oletetaan kohinaisiksi, jonka myötä ne ovat jakaantuneet oikean suureen ympärille jonkin jakauman mukaan. Tässä työssä jakaumat oletetaan normaalijakaumiksi. Bayeslaista estimointiteoriaa soveltaen ratkaistaan tilan ehdollinen jakauma aikasarjassa, ehdolla nykyiset ja aiemmat mittaukset, eli posteriorijakauma ja posteriorijakauman perusteella tarvittavat estimaatit. Tätä kutsutaan suodatukseksi [3, s. 40]. Sisätilapaikannuksen tapauksessa haastetta posteriorijakauman estimointiin tuo erityisesti sisätilakartta, joka tulisi huomioida suodatuksessa. Karttarajoitteet voidaan huomioida käyttämällä posteriorijakaumien estimointiin partikkelisiluodatinta, jolla aproksimoidaan posteriorijakaumia yksittäisten pisteiden eli partikkelien sekä niiden painojen avulla. Karttarajoitteet huomioidaan suodatuksessa painottamalla partikkeleita niiden liikkeen, sekä karttatiedon perusteella.

Siloituksessa ratkaistaan tilan estimaattia, kun aiempien ja nykyisten mittausten lisäksi käytössä on myös tulevien ajanhetkien mittauksia. Suodatukseen verrattuna käytössä on siis enemmän informaatiota ja sen myötä esimerkiksi estimoidusta rei-

tistä saadaankin yleensä tarkempi, kuin suodatuksella. Koska tulevien ajanhetkien mittauksia käytetään, niin siloitettun estimaatin laskemiseen liittyy jonkin verran viivettä, joka rajoittaa siloitusmenetelmien käyttöä reaaliaikaisissa sovelluksissa. Tyypillisesti niitä käytetäänkin sovelluksissa, jotka eivät ole reaaliaikaisia. Esimerkiksi viitteessä [25] on siloitusmenetelmiä käytetty mäkihyppääjän lentoradan ja curling kiven kulkeman radan ratkaisemiseen jälkikäteen inertiamittauksiin perustuen. Sisätilapaikannuksen tapauksessa partikkelisiloitusta voitaisiin käyttää kuljetun reitin tarkentamiseen esimerkiksi tilanteissa, joissa partikkelisuodattimen estimaatti on harhautunut. Sitä voitaisiin myös mahdollisesti käyttää reitin visualisointiin käyttäjälle kannettavissa laitteissa. Julkaisussa [32, s. 209] on esitetty yksi tapa siloittaa partikkelisuodattimen estimoimaa reittiä. Tässä työssä sisätilapaikannukseen sovellettavat partikkelisiloitusmenetelmät ovat suodatinsiloitin (filter-smoother, FS) [21], eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus (Forward Filtering-Backward Smoothing, FFBS) [8], sekä yleistetty kahden suodattimen kaava (Generalized Two-filter Formula, GTFF) [5].

## 1.2 Työn rakenne

Luvussa 2 käydään läpi bayeslaisen suodatuksen teoriaa alkaen suodatuksen ongelman asettelusta ja päättyen lopulta partikkelisuodattimeen. Tässä luvussa esitellään mm. Kalmanin suodatin, jonka avulla voidaan ratkaista posteriorijakaumat analyttisesti tietyssä erityistapauksessa. Lisäksi luvussa käsitellään sekventiaalisia Monte Carlo menetelmiä (Sequential Monte Carlo methods, SMC), avaamaan partikkelisuodattimen matemaattista taustaa.

Työn luvussa 3 käydään puolestaan läpi siloitusmenetelmiä. Luvun aluksi jaotellaan siloitus kolmeen eri tyyppiin, jonka jälkeen tarkastellaan bayeslaista siloitusta, jossa tarkoituksena on ratkaista aikasarjassa siloitusjakauma (smoothed distribution). Luvussa esitellään Rauch-Tung-Striebel siloitin (Rauch-Tung-Striebel Smoother), sekä kahden suodattimen kaava (Two-filter Formula), joilla voidaan ratkaista siloitusjakaumat analyttisesti tietyssä erityistapauksessa. Tämän jälkeen esitellään FS-, FFBS- ja GTFF-partikkelisiloitusmenetelmät.

Luvussa 4 käydään läpi työssä käytettyjä tila- ja mittausmalleja. Kävelijän liikkeen mallintamiseen käytetystä epälineaarista tilamallista, johdetaan myös lineaarinen malli, jota voidaan käyttää tietyin oletuksin esimerkiksi Kalmanin suodattimella ja RTS-siloittimella.

Luku 5 esittelee simulaatioiden, sekä todellisilla mittauksilla tehtyjen testien tulokset, joissa vertaillaan partikkelisuodattimen, sekä FS-, FFBS- ja GTFF-siloitusmenetelmien paikannustuloksia. Luvun aluksi vertaillaan ensin FS-, FFBS-

ja GTFF-partikkelisiloitusmenetelmien estimoimien reittien, sekä RTS-siloittimen estimoimaa reittiä. Kappaleen lopuksi todellisilla mittauksilla testataan FFBS-partikkelisiloittimen toimivuutta.

Työn päättää luku 6, joka vetää työn yhteen ja esittää työn tulosten pohjalta ehdotuksia jatkotutkimukseen.

# Luku 2

## Suodatus

### 2.1 Ongelman asettelu

**Määritelmä 1. (Todennäköisyysavaruus)** Kolmikkoa  $(\Omega, F, P)$ , missä  $\Omega$  on otosavaruus,  $F$  tapahtumien joukko ja  $P$  tapahtumiin liittyvä todennäköisyys, kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi [17, s. 2].

**Määritelmä 2. (Stokastinen prosessi)** Olkoon  $(\Omega, F, P)$  todennäköisyysavaruus ja  $T$  parametrijoukko. Stokastinen prosessi on sellainen kuvaus  $\mathbf{x} : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  ( $n_x$  on vektorin  $\mathbf{x}$  dimensio), että jokaisella kiinteällä  $t \in T$   $\mathbf{x}_t$  on satunnaismuuttuja [2, s. 15]. Merkitään stokastista prosessia  $\{\mathbf{x}_t\} = \{\mathbf{x}_t, t \in \mathbb{N}\}$ .

Paikannus on yksi esimerkki stokastisten prosessien teorian sovelluskohteesta, jossa tilalle  $\mathbf{x}$  halutaan ratkaista mahdollisimman hyvä estimaatti tietyllä ajanhetkellä  $t$ . Paikannuksen tapauksessa tila  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  ajanhetkellä  $t$ , missä  $t \in \mathbb{N}$ , sisältää ainakin tiedon paikannettavan paikasta ja mahdollisesti muuta paikannuksen kannalta tärkeää informaatiota, kuten esimerkiksi nopeuden. Prosessin dynamiikkaa kuvataan tilamallilla, joka kertoo miten prosessi etenee ajan kuluessa. Käytössä olevien mittausten riippuvuutta sen hetkisestä tilasta mallinnetaan mittausmallilla. Stokastisen prosessin tilan estimoinnin ongelma voidaan formuloida prosessin alkutilan  $\mathbf{x}_0$  sekä



prosessin tilamallin ja mittausmallin avulla [2, s. 16]. Tila- ja mittausmalli voidaan kirjoittaa stokastisina differenssiyhtälöinä

$$\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}, \quad (2.1.1)$$

ja

$$\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t, \quad (2.1.2)$$

jolloin sekä tilamallin että mittausmallin kohinat,  $\mathbf{w}_{t-1}$  ja  $\mathbf{v}_t$ , oletetaan additiiviseksi [15, s. 86, 143]. Vektori-arvoiset tilansiirtofunktio  $f_{t-1}$  ja mittausfunktio  $h_t$  oletetaan jatkuvasti derivoituviksi argumenttiensa suhteen [2, s. 16]. Tilamallin kohina oletetaan nollakeskiseksi ja normaali-jakautuneeksi  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$ , kuten myös mittausmallin kohina  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$ .

## 2.2 Bayeslainen suodatus

Bayesilaisessa suodatuksessa pyritään ratkaisemaan aikasarjassa ajanhetkellä  $t$  tilan ehdollinen jakauma  $p(x_t|y_{1:t})$ , eli posteriorijakauma, käyttäen koko mittaushistoriaa aina kyseiseen ajanhetkeen asti. Posteriorijakauman avulla voidaan edelleen ratkaista estimaatti prosessin tilalle. Laskennan kannalta on tehokasta, jos ajasta riippuvan dynaamisen prosessin tilan estimointi voidaan tehdä rekursiivisesti sen sijaan, että käytettäisiin koko mittaushistoriaa tilan estimaatin laskemiseen. Jotta näin voidaan tehdä, niin tarvitaan oletuksia kohinoiden riippumattomuuksista. [3, s. 40]

**Määritelmä 3. (Tilojen Markov ominaisuus)** Stokastisella prosessilla  $\{\mathbf{x}_t\}$  on Markov ominaisuus, jos ehdollisille jakaumille pätee

$$p(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t-1}) = p(x_t|x_{t-1}) \quad (t > 0) \quad (2.2.1)$$

ja

$$p(x_{t-1}|x_{t:T}, y_{t:T}) = p(x_{t-1}|x_t) \quad (0 < t < T). \quad (2.2.2)$$

[29, s. 32].

**Määritelmä 4. (Valkoinen normaalisti jakautunut prosessi)** Jos satunnaismuuttuja  $\mathbf{x}_t$  on normaalisti jakautunut ja

$$p(x_t|x_{0:t-1}) = p(x_t|x_{t-1}) = p(x_t) \quad (2.2.3)$$

$\forall t \in \mathbb{N}$ , niin prosessi  $\{\mathbf{x}_t\}$  on valkoinen normaalisti jakautunut prosessi [15, s. 81], [2, s. 15].

**Määritelmä 5. (Normaalijakauma)** Olkoon  $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  vektoriarvoinen satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo  $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = m \in \mathbb{R}^p$  ja kovarianssimatriisi  $\mathbb{V}(\mathbf{x}) = P$  on symmetrinen ja positiivisesti definiitti  $p \times p$  matriisi. Tällöin satunnaismuuttuja  $\mathbf{x}$  noudattaa  $p$ -ulotteista normaalijakaumaa parametrein  $m$  ja  $P$ , jota merkitään  $\mathbf{x} \sim N(m, P)$ , jos sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi P)}} \exp\left(-\frac{(x-m)^T P^{-1}(x-m)}{2}\right) \quad (2.2.4)$$

[14, s. 88-89].

**Määritelmä 6. (Bayesin sääntö)** Satunnaismuuttujan  $\mathbf{x}$  ehdollinen tiheysfunktio ehdolla  $\mathbf{y} = y$  määritellään yhtälöllä

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)dx}, \quad (2.2.5)$$

missä  $p(y) \neq 0$  [29, s. 15].

Oletetaan vielä, että kohinat  $\{\mathbf{w}_{t-1}\}$  ja  $\{\mathbf{v}_t\}$  ovat valkoisia ja normaalisti jakautuneita prosesseja. Lisäksi  $\{\mathbf{w}_{t-1}\}$  ja  $\{\mathbf{v}_t\}$  oletetaan riippumattomiksi toisistaan ja  $\{\mathbf{w}_{t-1}\}$  oletetaan ovat riippumattomaksi alkutilasta  $\mathbf{x}_0$ . Tällöin prosessit  $\{\mathbf{x}_t\}$ ,  $\{\mathbf{y}_t\}$  ja  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t\}$  ovat Markovin prosesseja. Kun nämä oletukset tehdään, niin tilan estimaatti voidaan ratkaista rekursiivisesti. [2, s. 16]

Posteriorijakauman laskeminen voidaan jakaa kahteen vaiheeseen: ennustusaskeleeseen ja päivitysaskeleeseen. Ennustusaskeleella ratkaistaan priorijakauma Chapman-Kolmogorov-yhtälöstä

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1}, \quad (2.2.6)$$

missä jakauma  $p(x_{t-1}|y_{1:t-1})$  on edellisen ajanhetken posteriorijakauma ja jakauma  $p(x_t|x_{t-1})$  saadaan tilamallin kohinan jakaumasta

$$p(x_t|x_{t-1}) = p_{\mathbf{w}_{t-1}}(x_t - f_{t-1}(x_{t-1})) = N(x_t|f_{t-1}(x_{t-1}), Q_{t-1}) \quad (2.2.7)$$

[3, s. 48]. Päivitysaskeleella lasketaan Bayesin sääntöä (2.2.5) käyttäen [28, s. 5] posteriorijakauma

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{p(y_t|y_{1:t-1})}, \quad (2.2.8)$$

missä  $p(y_t|x_t)$  on uskottavuusfunktio, joka saadaan mittausmallin kohinan jakaumasta

$$p(y_t|x_t) = p_{\mathbf{v}_t}(y_t - h_t(x_t)) = N(y_t|h_t(x_t), R_t) \quad (2.2.9)$$

[3, s. 48] ja

$$p(y_t|y_{1:t-1}) = \int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t \quad (2.2.10)$$

on normalisointitekijä [29, s. 34].

## 2.3 Kalmanin suodatin

Kalmanin suodattimella (Kalman filter, KF) voidaan ratkaista analyttisesti suodatusongelma erikoistapauksessa, jossa tilansiirto- ja mittausfunktiot ovat lineaarisia ja kohinat normaalijakautuneita. Tässä kappaleessa esitetään Kalmanin suodatin. Kalmanin suodattimen johto on esitetty viitteessä [2, s. 82-88]. Kalmanin suodattimen oletukset ovat seuraavat.

Oletetaan, että prosessin alkutilan  $\mathbf{x}_0$  jakauma on muotoa

$$\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0), \quad (2.3.1)$$

missä kovarianssimatriisi  $P_0$  oletetaan positiivisesti definiitiksi. Kalmanin suodattimen tila- ja mittausmalli ovat muotoa

$$\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}, \quad (2.3.2)$$

sekä

$$\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad (2.3.3)$$

missä  $F_{t-1}$  on tilansiirtomatriisi ja  $H_t$  mittausmatriisi. Kohinat  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$  sekä  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$  oletetaan riippumattomiksi toisistaan ja lisäksi tilamallin kohina oletetaan riippumattomaksi alkutilasta  $\mathbf{x}_0$ . Kun stokastinen prosessi toteuttaa nämä oletukset, niin posteriorijakaumat voidaan ratkaista Kalmanin suodattimella, jonka algoritmi on esitetty algoritmossa 1.

---

**Algoritmi 1** Kalmanin suodatin

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$

1. Asetetaan  $t = 1$ .

2. Lasketaan

- Priori-tilan odotusarvo  $m_t^- = F_{t-1}m_{t-1}$ ,
- Priori-tilan kovarianssimatriisi  $P_t^- = F_{t-1}P_{t-1}F_{t-1}^T + Q_{t-1}$ ,
- Posteriori-tilan odotusarvo  $m_t = m_t^- + K_t(y_t - H_t m_t^-)$ ,
- Posteriori-tilan kovarianssimatriisi  $P_t = (I - K_t H_t)P_t^-$ ,

missä  $K_t = P_t^- H_t^T (H_t P_t^- H_t^T + R_t)^{-1}$  on Kalmanin vahvistus.

3. Jos  $t = T$ , niin lopetetaan. Muuten asetetaan  $t = t + 1$  ja palataan kohtaan 2.

---

## 2.4 Sekventiaaliset Monte Carlo menetelmät

Monessa tapauksessa posteriorijakaumaa ei voida ratkaista analyttisesti ja tällöin suodatusongelman ratkaisemiseksi tarvitaan vaihtoehtoisia menetelmiä. Sekventiaaliin Monte Carlo menetelmiin (SMC) perustuvalla partikkelisuodattimella voidaan posteriorijakaumaa approksimoida numeerisesti aikasarjassa. SMC-menetelmien yksi vahvuus on se, että niitä käyttämällä pystytään aproksimoimaan mielivaltaisia jakaumia. Aproksimointi tehdään painotetuilla partikkeleilla. Partikkeleiksi tai näytteiksi kutsutaan jakauman yksittäisiä pisteitä  $x$  ja kukin partikkeli saa sitä suuremman normalisoidun painon  $W$ , mitä lähempänä se sijaitsee jakauman todennäköisintä aluetta. SMC-menetelmiä kehitettiin 1950-1970-luvuilla, mutta tuon ajan laskentakapasiteetin puitteissa niiden soveltaminen ei ollut mahdollista [28, s. 35]. Yksi SMC-menetelmien heikkouksista onkin niiden edellyttämä raskas laskenta. Laskentakapasiteetin kehittyessä on SMC-menetelmien potentiaalia pystytty hyödyntämään ja viimeisen viidentoista vuoden aikana, niitä on käytetty paljon partikkeli-suodatukseen ja -siloitukseen [9, s. 665].

### 2.4.1 Monte Carlo integrointi

SMC-menetelmät perustuvat Monte Carlo integrointiin, jossa aproksimoidaan integraalia

$$I = \int g(x)dx, \quad (2.4.1)$$

missä  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Monte Carlo menetelmien ideana on kirjoittaa funktio  $g : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  muodossa  $f(x)\pi(x)$ , missä  $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  ja  $\pi(x)$  on tiheysfunktio, jolloin  $\int \pi(x)dx = 1$  sekä  $\pi(x) \geq 0$ . Tällöin integraalia (2.4.1) pystytään aproksimoimaan jakaumasta  $\pi(x)$  generoitujen toisistaan riippumattomien partikkelien  $x^i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) ja näille pisteille laskettujen arvojen  $f(x^i)$  avulla

$$I = \int f(x)\pi(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i), \quad (2.4.2)$$

missä  $N$  on partikkeleiden lukumäärä. Suurten lukujen lain mukaan integraalin aproksimaatio suppenee oikeaan arvoon  $I$  melkein varmasti. [28, s. 35]

### 2.4.2 Painotuspoiminta

Siinä tapauksessa, kun emme pysty generoimaan partikkeleita suoraan jakaumasta  $\pi(x)$ , voidaan käyttää painotuspoimintaa (Importance Sampling). Painotuspoiminnassa partikkelit generoidaan ns. ehdokasjakaumasta  $q(x)$ , joka muistuttaa jakaumaa  $\pi(x)$ . Ehdokasjakauman on totetutettava ehto

$$\pi(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.4.3)$$

eli ehdokasjakauman kantajan on oltava vähintään yhtä suuri kuin jakauman  $\pi(x)$  kantajan.

Kun kantajaehto toteutuu, niin voidaan kirjoittaa

$$f(x)\pi(x) = f(x)\frac{\pi(x)}{q(x)}q(x) \quad (2.4.4)$$

ja generoimalla ehdokasjakaumasta  $N$  kappaletta toisistaan riippumattomia partikkeleita saadaan integraalille (2.4.1) aproksimaatio

$$I \approx \sum_{i=1}^N w^i f(x^i) \quad (2.4.5)$$

missä

$$w^i = \frac{1}{N} \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)} \quad (2.4.6)$$

on partikkelin  $x^i$  paino.

Bayeslaisen suodatuksen tapauksessa haluaisimme ratkaista aproksimaation posteriorijakaumalle  $p(x|y_{1:T})$ . Koska posteriorijakaumaa ei tunneta, niin partikkelien painoja ei pystytä laskemaan kaavalla (2.4.6), missä  $\pi(x)$  vastaa posteriorijakaumaa. Jotta painot voitaisiin laskea, niin kirjoitetaan Bayesin säännön (2.2.5) avulla posteriorijakauma muotoon

$$p(x|y_{1:T}) = \frac{p(y_{1:T}|x)p(x)}{\int p(y_{1:T}|x)p(x)dx}. \quad (2.4.7)$$

Generoidaan sitten partikkelit  $x^i$  ehdokasjakaumasta, joka on muotoa  $q(x|y_{1:T})$ . Nyt integraalin (2.4.1) aproksimaatioksi saadaan

$$I = \int f(x)p(x|y_{1:T})dx \approx \sum_{i=1}^N W^i f(x^i), \quad (2.4.8)$$

missä normalisoidut painot  $W^i$  saadaan, kun lasketaan ensin painot

$$w^i = \frac{p(y_{1:T}|x^i)p(x^i)}{q(x^i|y_{1:T})}, \quad (2.4.9)$$

jonka jälkeen tehdään normalisointi

$$W^i = \frac{w^i}{\sum_{j=1}^N w^j}. \quad (2.4.10)$$

Jos funktioksi  $f$  valitaan Diracin deltafunktio  $\delta(x - x^i)$ , niin posteriorijakauman aproksimaatioksi saadaan

$$p(x|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N W^i \delta(x - x^i) \quad (2.4.11)$$

[29, s. 81-84].

### 2.4.3 Sekventiaallinen painotuspoininta

Sekventiaalisen painotuspoininnan (Sequential Importance Sampling) avulla voidaan laskea posteriorijakaumat  $p(x_t|y_{1:t})$  rekursiivisesti, eli sekventiaalisesti. Jotta

näin voidaan tehdä, niin ehdokasjakaumat valitaan niin, että ne ovat ajanhetkelle  $t$  muotoa

$$q(x_{0:t}|y_{1:t}) = q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})q(x_{0:t-1}|y_{1:t-1}). \quad (2.4.12)$$

Tämän lisäksi kirjoitetaan ajanhetken  $t$  koko posteriorijakauma  $p(x_{0:t}|y_{1:t})$  muotoon

$$p(x_{0:t}|y_{1:t}) \propto p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})p(x_{0:t-1}|y_{1:t-1}) \quad (2.4.13)$$

ja johdetaan rekursiivinen lauseke painojen laskemiseksi. Ajanhetken  $t$  partikkelien  $x_t$  normalisoimattomat painot voidaan kirjoittaa muodossa

$$w_t = \frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \quad (2.4.14a)$$

$$= \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})p(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})}{q(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})} \quad (2.4.14b)$$

$$= \frac{p(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})}{q(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})} \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})}{q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})} \quad (2.4.14c)$$

$$= w_{t-1} \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})}{q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})}. \quad (2.4.14d)$$

Kun bayeslaisen suodatuksen avulla ratkaistaan posteriorijakaumia  $p(x_t|y_{1:t})$ , niin ehdokasjakauma voidaan kirjoittaa muodossa  $q(x_t^i|x_{t-1}^i, y_t)$ , jolloin ajanhetken  $t$  ehdokasjakauma riippuu siis vain edellisen ajanhetken tilasta  $x_{t-1}$  ja uusimmasta mittauksesta  $y_t$  [28, s. 39]. Marginaali posteriorijakaumia voidaan aproksimoida rekursiivisten painojen avulla muodossa

$$p(x_t|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^N W_t^i \delta(x_t - x_t^i), \quad (2.4.15)$$

missä  $W_t^i$  on normalisoitu paino. [29, s. 85]

Sekventaalisessa painotuspoiminnassa ongelma on se, että ennen pitkää lähes kaikkien partikkelien paino on lähellä nollaa ja paino kasaantuu vain muutamille partikkeleille. Tämä johtuu siitä, että painojen varianssi kasvaa aikasarjassa eteenpäin mentäessä. Ilmiötä kutsutaan degeneraatio-ongelmaksi (Degeneracy problem) ja sen eliminoimiseksi voidaan käyttää uudelleennäytteistystä. [28, s. 40]

## 2.4.4 Uudelleennäytteistys

Uudelleennäytteistyksellä (Resampling) huolehditaan, että partikkelien määrä ei pääse liian pieneksi. Siinä partikkeleista generoidaan uudet partikkelit monistamalla partikkeleita, joilla on suuri paino ja eliminoimalla partikkeleita, joilla on pieni paino. Näytteistä generoidaan uudet näytteet, mihin termi uudelleennäytteistys viittaa. Uudelleennäytteistys lisää varianssia partikkelien painoihin, jolloin sitä ei kannata

välttämättä käyttää jokaisella aika-askeleella [9, s. 674]. Efektiivisen näytteiden lukumäärän (Effective Sample Size)

$$\text{ESS} = \left( \sum_{i=1}^N (W_t^i)^2 \right)^{-1}, \quad (2.4.16)$$

missä  $1 \leq \text{ESS} \leq N$ , avulla voidaan arvioida onko uudelleennäytteistys kannattavaa vai ei. Tilanteessa jossa yhdellä partikkelilla on kaikki paino  $\text{ESS} = 1$  ja tilanteessa, jossa kaikkien partikkelien paino on  $\frac{1}{N}$ , niin  $\text{ESS} = N$ . Siis mitä pienempi ESS on, sitä suuremmalla määrällä partikkeleita paino on lähellä nollaa [28, s. 41]. Uudelleennäytteistysmenetelmiä on useita. Systemaattinen uudelleennäytteistys on kirjallisuudessa käytetyin menetelmä ja muita menetelmiä ovat mm. residuaali ja multinomi uudelleennäytteistys [9, s. 672-673]. Tässä työssä uudelleennäytteistys tehdään käyttäen systemaattista uudelleennäytteistystä.

### 2.4.5 Ehdokasjakauman valinnasta

Ehdokasjakauman valinnalla on vaikutusta partikkelisuodattimen toimivuuteen. Mitä paremmin ehdokasjakauma vastaa posteriorijakaumaa sitä paremmin partikkelit pystytään generoimaan posteriorijakauman alueelle, jolla on suurin osa todennäköisyysmassasta. Optimaalinen ehdokasjakauma  $q(x_t|x_{t-1}^i, y_t)_{\text{opt}}$ , joka minimoi painojen varianssin on muotoa

$$q(x_t|x_{t-1}^i, y_t)_{\text{opt}} = p(x_t|x_{t-1}^i, y_t) \quad (2.4.17a)$$

$$= \frac{p(y_t|x_t, x_{t-1}^i)p(x_t|x_{t-1}^i)}{p(y_t|x_{t-1}^i)} \quad (2.4.17b)$$

[8, s. 199], [28, s. 45]. Optimaalisen ehdokasjakauman sijasta käytetään yleisesti paljon myös ehdollista jakaumaa  $p(x_t|x_{t-1}^i)$ . Tällöin painoja  $w_t$  laskettaessa edellisen ajanhetken painoja  $w_{t-1}$  painotetaan vain uskottavuudella, jakaumien  $p(x_t^i|x_{t-1}^i)$  supistuessa pois yhtälössä (2.4.14d). Vaikka painojen laskeminen helpottuu, niin joissain tapauksissa  $p(x_t|x_{t-1}^i)$  saattaa olla paljon laakeampi kuin posteriorijakauma, jolloin on mahdollista, että vain muutama partikkeli saa suuren painon [28, s. 47]. Myös esimerkiksi laajennettua Kalmanin suodatinta (Extended Kalman filter) voidaan käyttää ehdokasjakauman ratkaisemiseksi [27, s. 25-26].



## 2.5 Partikkelisuodatin

Yksinkertaisimmillaan partikkelisuodatin (particle filter, PF) perustuu sekventiaaliseen painotuspoimintaan ja uudelleennäytteistykseen. Partikkelisuodattimen aproksimoimista posteriorijakaumista voidaan laskea ajanhetken  $t$  tilan estimaatiksi posteriorijakauman odotusarvo partikkelien painotettuna keskiarvona

$$m_t \approx \sum_{i=1}^N W_t^i x_t^i \quad (2.5.1)$$

ja posteriorijakauman kovarianssimatriisi yhtälöstä

$$P_t \approx \sum_{i=1}^N W_t^i (x_t^i - m_t)(x_t^i - m_t)^T. \quad (2.5.2)$$

Algoritmi partikkelisuodattimelle on esitetty algoritmissa 2.

---

**Algoritmi 2** Partikkelisuodatin

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$ .

Partikkelien määrä  $N$  ja ehdokasjakaumat  $q(x_t|x_{t-1}, y_t)$

Uudelleennäytteistyskynnysarvo  $\text{ess}_k$

1. Simuloidaan näytteet  $x_0^i$  ehdokasjakaumasta  $q_0(x_0) = N(m_0, P_0)$ .
  2. Asetetaan painot  $W_0^i = \frac{1}{N}$  ja  $t = 1$ .
  3. Simuloidaan partikkelit  $x_t^i$  jakaumasta  $q(x_t^i|x_{t-1}^i, y_t)$ .
  4. Lasketaan painot  $w_t^i = W_{t-1}^i \frac{p(y_t|x_t^i)p(x_t^i|x_{t-1}^i)}{q(x_t^i|x_{t-1}^i, y_t)}$ .
  5. Normalisoidaan painot  $W_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{i=1}^N w_t^i}$ .
  6. Lasketaan odotusarvo  $m_t \approx \sum_{i=1}^N W_t^i x_t^i$ .
  7. Lasketaan kovarianssimatriisi  $P_t \approx \sum_{i=1}^N W_t^i (x_t^i - m_t)(x_t^i - m_t)^T$ .
  8. Jos  $\text{ESS} < \text{ess}_k$ , niin tehdään uudelleennäytteistys.
  9. Jos  $t = T$ , niin lopetetaan. Muuten asetetaan  $t = t + 1$  ja palataan kohtaan 3.
-

# Luku 3

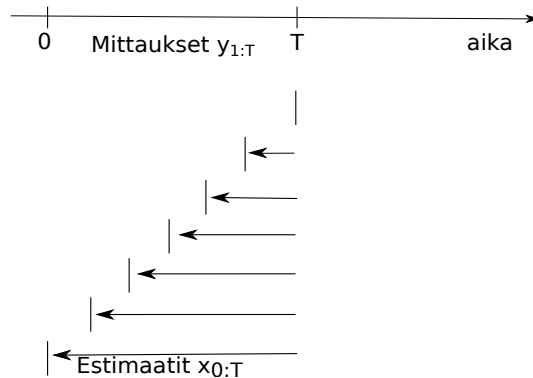
## Siloitus

### 3.1 Siloituksen taustaa

Suodattimella voidaan ratkaista tilan estimaatti tietyllä ajanhetkellä  $t$ , käyttäen kaikkia kyseisen ajanhetken mittauksia ja aiempia mittauksia. Siloituksessa (smoothing) ajanhetken  $t$  tilan ratkaisemiseen käytetään nykyisten ja aikaisempien mittausten lisäksi myös tulevien ajanhetkien mittauksia. Siloituksessa on siis suodatuksen verrattuna käytössä lisäinformaatiota, jolloin estimoinnissa voidaan päästä parempaan lopputulokseen. Nimensä mukaan siloituksella saadaan estimoidusta reitistä yleensä ”sileämpi”, kuin suodatuksella. Suodatuksen verrattuna siloituksessa tilan estimoinnissa on kuitenkin jonkin verran viivettä, koska siihen tarvitaan tulevien ajanhetkien mittauksia. Siloitus voidaan jakaa kolmeen eri tyyppiin [6, s. 265]:

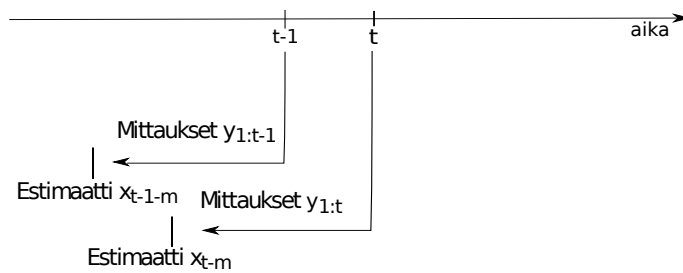
1. **Kiinnitetyn välin siloitus (Fixed-interval smoothing):** Ratkaistaan tilojen  $\mathbf{x}_t$  estimaatit, missä  $t \in 0, \dots, T$ , käyttäen jokaisen estimaatin ratkaisemiseen mittauksia  $y_{1:T}$ . (kuva 3.1)

2. **Kiinnitetyn viiveen siloitus (Fixed-lag smoothing):** ratkaistaan tilojen  $\mathbf{x}_{t-m}$  estimaatit mittauksista  $y_{1:t}$ , kun  $m$  on kiinnitetty,  $t$  kasvaa jokaisella aika-askeleella ja  $y_t$  vastaa viimeisintä mittausta. (kuva 3.2)
  
3. **Kiinnitetyn tilan siloitus (Fixed-point smoothing):** ratkaistaan tilalle  $\mathbf{x}_m$  estimaatteja, missä  $m$  on kiinnitetty, mittauksista  $y_{1:t}$ , kun  $t$  kasvaa jokaisella aika-askeleella ja  $y_t$  vastaa viimeisintä mittausta. (kuva 3.3)

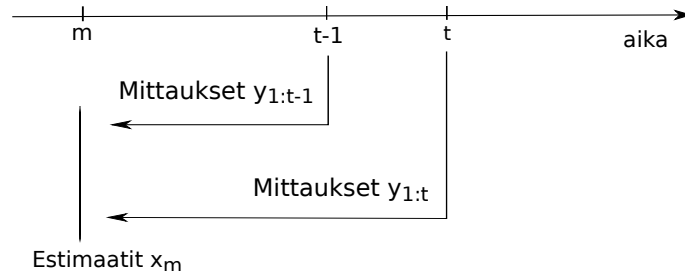


Kuva 3.1: Kiinnitetyn välin siloitus. Kuvassa viivat, joihin nuolet osoittavat kuvaavat tilan estimaatteja.

Kiinnitetyn välin siloituksessa on käytössä mittaukset  $y_{1:T}$  ja niistä estimoidaan kutakin ajanhetkeä  $t$  vastaavaa tilaa. Aikasarjassa kiinnitetyn välin siloitus voidaan tehdä pitämällä muistissa  $T$  kappaletta uusimpia mittauksia ja estimoimalla tilat kyseiseltä mittausväliltä [6, s. 266].



Kuva 3.2: Kiinnitetyn välin siloitus.



Kuva 3.3: Kiinnitetyn tilan siloitus.

Kiinnitetyn viiveen ja kiinnitetyn tilan siloitusta tehtäessä aikasarjassa, estimointiin käytössä olevien mittausten  $y_{1:t}$  lukumäärä kasvaa. Kiinnitetyn viiveen siloituksessa ratkaistaan ajanhetken  $t - m$  estimaattia, kun  $m$  on kiinnitetty, ja kiinnitetyn tilan siloituksessa ratkaistaan estimaatteja tietyn ajanhetken  $m$  tilalle.

Tästä eteenpäin tarkastellaan kiinteän välin siloitusta, jota tullaan käyttämään myös tämän työn simulaatioissa ja testitapauksissa oikeilla mittauksilla. Kiinteän välin siloituksen algoritmien avulla voidaan johtaa algoritmit myös kiinteän välin ja kiinteän tilan siloitukseen.

## 3.2 Bayeslainen siloitus

Bayeslaisen siloituksen tarkoituksena on ratkaista ajanhetken  $t$  tilan ehdollinen jakauma

$$p(x_t | y_{1:T}), \quad (3.2.1)$$

kun ehtona on aiempien ja nykyisten mittausten lisäksi seuraavien ajanhetkien  $t + 1, t + 2, \dots, T$  mittauksia. Tästä eteenpäin kutsumme jakaumaa (3.2.1) siloitusjakaumaksi tai siloitetuksi jakaumaksi.

Yksi tapa kyseisen jakauman ratkaisemiseksi on käyttää niin sanotusti eteenpäin- taaksepäin rekursioita (forward-backward recursions). Näissä menetelmissä tehdään ensin reitin suodatus aikasarjassa eteenpäin ja sen jälkeen siloitus alkaen viimeisestä ajanhetkestä aikasarjassa taaksepäin. Siloitusjakauma voidaan ratkaista rekursiivisesti alkaen ajanhetkestä  $T$  käyttämällä yhtälöitä

$$p(x_{t+1} | y_{1:t}) = \int p(x_{t+1} | x_t) p(x_t | y_{1:t}) dx_t \quad (3.2.2)$$

$$p(x_t | y_{1:T}) = p(x_t | y_{1:t}) \int \frac{p(x_{t+1} | x_t) p(x_{t+1} | y_{1:T})}{p(x_{t+1} | y_{1:t})} dx_{t+1}. \quad (3.2.3)$$

[29, s. 96].

Vaihtoehtoinen tapa siloitusjakauman ratkaisemiseksi on käyttää kahden suodattimen kaavaan (Two-filter Formula, TFF) perustuvia menetelmiä [12]. Nimensä mukaisesti tässä menetelmässä käytetään kahta suodatinta, joista ensimmäinen suodatin kulkee aikasarjassa eteenpäin ja toinen suodatin, jota kutsutaan informaatio-suodattimeksi (Backward information filter, BIF), kulkee aikasarjassa taaksepäin [31, s. 9-10]. Näiden suodattimien avulla lasketaan silotusjakaumat  $p(x_t|y_{1:T})$ . Siloitettun jakauman  $p(x_t|y_{1:T})$  ratkaisu saadaan kahden suodattimen kaavalla yhtälöstä

$$p(x_t|y_{1:T}) = \frac{p(x_t|y_{1:t-1})p(y_{t:T}|x_t)}{p(y_{t:T}|y_{1:t-1})} \quad (3.2.4)$$

[9, s. 663].

### 3.3 Rauch-Tung-Striebel siloitin

Rauch-Tung Striebel siloitinella (RTS) voidaan ratkaista analyyttisesti siloitusjakaumat aikasarjassa siinä erikoistapauksessa, jossa tila ja liikemalli ovat lineaarisia ja mallien kohinat normaalisti jakautuneita. RTS-siloitinta kutsutaan myös Kalmanin siloittimeksi. Algoritmi RTS-siloittimelle on esitetty algoritmossa 3. Algoritmin todistus on esitetty liitteessä A.

---

**Algoritmi 3** Rauch-Tung-Striebel siloitin

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$

1. Lasketaan Kalmanin suodattimella ja talletetaan jokaiselle ajanhetkelle  $t$  priori- sekä posterioritilan odotusarvot  $m_t^-$  ja  $m_t$ , sekä kovarianssimatriisit  $P_t^-$  ja  $P_t$ .
2. Asetetaan  $t = T$  ja sekä siloitusjakauman odotusarvoksi  $m_t^s$  ja kovarianssimatriisiksi  $P_t^s$  suodatuksen posterioriestimaatit

- $m_t^s = m_t$

- $P_t^s = P_t$

3. Asetetaan  $t = t - 1$  ja lasketaan siloitettujen jakaumien odotusarvot ja kovarianssimatriisit

- $G_t = P_t F_t^T (P_{t+1}^-)^{-1}$

- $m_t^s = m_t + G_t(m_{t+1}^s - m_{t+1}^-)$

- $P_t^s = P_t + G_t(P_{t+1}^s - P_{t+1}^-)G_t^T$

4. Jos  $t = 0$ , niin lopetetaan. Muuten palataan kohtaan 3.
- 

## 3.4 Kahden suodattimen kaava

Myös kahden suodattimen kaavalla voidaan ratkaista siloitusjakauma analyttisesti. Kahden suodattimen kaavan on havaittu tarjoavan etuja siloitusjakauman kovarianssimatriisiin numeerisen laskennan kannalta tilanteissa, joissa siloitus parantaa eniten suodatuksen estimaattia [12, s. 388]. Kahden suodattimen kaavassa (3.2.4) suodattamalla aikasarjassa eteenpäin saadaan kullekin ajanhetkelle priorijakauma  $p(x_t|y_{1:t-1})$  ja suodattamalla aikasarjassa taaksepäin jakauma  $p(y_{t:T}|x_t)$ . Alkuperäinen kahden suodattimen kaava on johdettu erikoistapauksessa, jossa tila- ja mittausmalli ovat lineaarisia, sekä mallien virheet normaalistajakautuneita [12, s. 387-388]. Suodatus aikasarjassa eteenpäin tehdään Kalmanin suodattimella ja aikasarjassa taaksepäin käyttäen informaatio-suodatinta [31, s. 9-10]. Informaatio-suodattimen algoritmi (algoritmi 4) esitetään seuraavana [30, s. 3].

---

**Algoritmi 4** Informaati-suodattimen aikasarjassa taaksepäin

---

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$ Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$ Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$ Informaati-suodattimen prioritiilan odotusarvo:  $z_t^-$ Informaati-suodattimen prioritiilan kovarianssimatriisi:  $Z_t^-$ Informaati-suodattimen posteriortilan odotusarvo:  $z_t$ Informaati-suodattimen posteriortilan kovarianssimatriisi:  $Z_t$ 1. Asetetaan  $t = T$  ja  $z_t^- = 0$ , sekä  $Z_t^- = 0$ .

Tehdään informaati-suodattimen päivitys-askel:

- $z_t = z_t^- + H_t^T(R_t)^{-1}y_t$
- $Z_t = Z_t^- + H_t^T(R_t)^{-1}H_t$

2. Asetetaan  $t = t - 1$  ja tehdään ennustusaskel

- $K_t = Z_{t+1}(Z_{t+1} + (Q_t)^{-1})^{-1}$
- $z_t^- = F_t^T(I - K_t)z_{t+1}$
- $Z_t^- = F_t^T(I - K_t)Z_{t+1}F_t$

sekä päivitysaskel

- $z_t = z_t^- + H_t^T(R_t)^{-1}y_t$
- $Z_t = Z_t^- + H_t^T(R_t)^{-1}H_t$

3. Jos  $t = 0$ , niin lopetetaan. Muuten palataan kohtaan 2.

---

Kalmanin suodattimen ja BIF:n avulla voidaan analyttisesti ratkaista siloitettun jakauman  $p(x_t|y_{1:T})$  odotusarvo ja kovarianssimatriisi kahden suodattimen kaavalla seuraavalla algoritmilla (algoritmi 5)[30, s. 3].

---

**Algoritmi 5** Kahden suodattimen kaava

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$

1. Ratkaistaan ja tallennetaan Kalmanin suodattimella jokaiselle ajanhetkelle  $t$ :  $m_t^-$ ,  $P_t^-$ ,  $m_t$  sekä  $P_t$  ja tallennetaan  $m_t$  sekä  $P_t$ .
  2. Ratkaistaan informaatio-suodattimella aikasarjassa taaksepäin jokaiselle ajanhetkelle  $t$ :  $z_t^-$ ,  $Z_t^-$ ,  $z_t$  sekä  $Z_t$  ja tallennetaan  $z_t^-$  sekä  $Z_t^-$ .
  3. Asetetaan  $t = 0$
  4. Lasketaan siloitusjakauman odotusarvo  $m_t^s$  ja kovarianssimatriisi  $P_t^s$ 
    - $K_t^s = P_t Z_t^- (I + P_t Z_t^-)^{-1}$
    - $P_t^s = (I - K_t^s) P_t$
    - $m_t^s = (I - K_t^s) m_t + P_t^s z_t^-$
  5. Jos  $t = T$ , niin lopetetaan. Muuten asetetaan  $t = t + 1$  ja palataan kohtaan 4.
- 

## 3.5 Partikkelisiloitusmenetelmiä

Tässä kappaleessa esitellään kolme partikkelisiloitusmenetelmää. Ensimmäisenä suodatinsiloitin (filter-smoother, FS), joka nimensä mukaan toimii yhtäaikaan partikkelisuodattimena ja partikkelisiloittimena pitämällä koko partikkelien historian muistissa. Toisena eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus (Forward Filtering-Backward Smoothing, FFBS), jolla approksimoidaan siloitettuja jakaumia  $p(x_t|y_{1:T})$  eteenpäin taaksepäin rekursioiden avulla, sekä yleistetty kahden suodattimen kaava (Generalized Two-filter Formula, GTFF), joka on nimensä mukaisesti kahden suodattimen kaavan laajennus siloitusongelmaan, jossa tila- sekä liikemalli voivat olla epälineaarisia, eikä mallien kohinoiden tarvitse olla normaalisti jakautuneita.

### 3.5.1 Suodatinsiloitin

Yksi tapa partikkelisiloitukseen on ratkaista partikkelisuodattimella yhteisjakauma  $p(x_{0:T}|y_{1:T})$  partikkelipolkujen  $x_{0:T}^i$ , sekä polkujen painojen  $W_T^i$  avulla. Tällöin koko



partikkelihistoria pidetään muistissa ja uudelleennäytteistys tehdään koko partikkelihistorialle. Tällä menetelmällä koko posteriorijakauman aproksimaatio on muotoa

$$p(x_{0:T}|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N W_T^i \delta(x_{0:T} - x_{0:T}^i) \quad (3.5.1)$$

ja ajanhetkien  $t \in 0, 1, 2, \dots, T$  siloitettut jakaumat  $p(x_t|y_{1:T})$  saadaan yhteisjakauman marginaalijakaumina, kun poimitaan ajanhetken  $t$  partikkelit

$$p(x_t|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N W_T^i \delta(x_t - x_t^i) \quad (3.5.2)$$

[29, s. 113]. Ongelmana tässä siloitusmenetelmässä on, että uudelleennäytteistysen takia ajanhetkillä  $t \ll T$  jakaumia  $p(x_t|y_{1:T})$  aproksimoidaan vain yhdellä tai muutamalla partikkelilla [11, s. 5]. Ongelman ratkaisemiseksi on kehitetty partikkelisiloitusmenetelmiä, joissa tämä degeneraatio-ongelma ei ole yhtä merkittävä.

### 3.5.2 Eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus

Eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus on partikkelisiloitusmenetelmä, jossa tehdään ensin partikkelisuodatus aikasarjassa eteenpäin ja tallennetaan kunkin ajanhetken  $t$  partikkelit  $x_t$  sekä painot  $W_t$ . Partikkelisuodatuksen jälkeen lasketaan viimeisestä ajanhetkestä  $T$  alkaen uudet painot  $W_{t|T}$  jokaisen ajanhetken  $t$  partikkeleille. Johdetaan seuraavaksi siloitusjakaumalle  $p(x_t|y_{1:T})$  SMC-aproksimaatio kaavan (3.2.3) perusteella. Oletetaan, että tiedämme ajanhetken  $t + 1$  siloitusjakaumalle aproksimaation

$$p(x_{t+1}|y_{1:T}) \approx \sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \delta(x_{t+1} - x_{t+1}^j). \quad (3.5.3)$$

Nyt sijoittamalla (3.5.3) yhtälöön (3.2.3) saadaan

$$p(x_t|y_{1:T}) \approx p(x_t|y_{1:t}) \sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \frac{p(x_{t+1}^j|x_t)}{p(x_{t+1}^j|y_{1:t})}. \quad (3.5.4)$$

Kirjoitetaan seuraavaksi priorijakauma yhtälön (2.2.6) mukaisesti

$$p(x_{t+1}|y_{1:t}) = \int p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{1:t})dx_t \quad (3.5.5)$$

ja posteriorijakauma suodatuksen partikkelien ja painojen avulla muodossa

$$p(x_t|y_{1:t}) \approx \sum_{l=1}^N W_t^l \delta(x_t - x_t^l). \quad (3.5.6)$$

Nyt sijoittamalla (3.5.6) yhtälöön (3.5.5) saadaan

$$p(x_{t+1}|y_{1:t}) \approx \sum_{l=1}^N W_t^l p(x_{t+1}|x_t^l) \quad (3.5.7)$$

ja edelleen sijoittamalla aproksimaatiot (3.5.6), sekä (3.5.7) yhtälöön (3.5.4) saadaan

$$p(x_t|y_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N W_t^i \delta(x_t - x_t^i) \sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \frac{p(x_{t+1}^j|x_t^i)}{\sum_{l=1}^N W_t^l p(x_{t+1}^j|x_t^l)} \quad (3.5.8a)$$

$$= \sum_{i=1}^N W_t^i \left[ \sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \frac{p(x_{t+1}^j|x_t^i)}{\sum_{l=1}^N W_t^l p(x_{t+1}^j|x_t^l)} \right] \delta(x_t - x_t^i) \quad (3.5.8b)$$

$$= \sum_{i=1}^N W_{t|T}^i \delta(x_t - x_t^i), \quad (3.5.8c)$$

missä

$$W_{t|T}^i = \sum_{j=1}^N W_t^i \left[ \sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \frac{p(x_{t+1}^j|x_t^i)}{\sum_{l=1}^N W_t^l p(x_{t+1}^j|x_t^l)} \right] \quad (3.5.9)$$

on ajanhetken  $t$  partikkelin  $x_t^i$  uusi paino. Seuraavaksi esitetään FFBS-partikkelisiloittimen algoritmi (algoritmi 6).

---

**Algoritmi 6** FFBS-siloitus

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$ .

Partikkelien määrä  $N$

1. Tehdään suodatus aikasarjassa eteenpäin ja tallennetaan kunkin ajanhetken  $t$  partikkelit  $x_t$  ja painot  $W_t$ .

2. Asetetaan  $t = T$ , partikkelien  $x_t^i$  painoiksi  $W_{t|T}^i = W_T^i$ , sekä siloitettun jakauman odotusarvoksi ja kovarianssimatriisiksi:

- $m_t^s = m_t$

- $P_t^s = P_t$

3. Asetetaan  $t = t - 1$  ja lasketaan painot

$$W_{t|T}^i = W_t^i \left[ \frac{\sum_{j=1}^N W_{t+1|T}^j \frac{p(x_{t+1}^j | x_t^i)}{\sum_{l=1}^N W_{t+1|T}^l p(x_{t+1}^l | x_t^i)} \right].$$

4. Lasketaan siloitettun jakauman  $p(x_t | y_{1:T})$  odotusarvo ja kovarianssimatriisi:

- $m_t^s \approx \sum_{i=1}^N W_{t|T}^i x_t^i$

- $P_t^s \approx \sum_{i=1}^N W_{t|T}^i (x_t^i - m_t^s)(x_t^i - m_t^s)^T$

5. Jos  $t = 0$ , niin lopetetaan, muuten palataan kohtaan 3.

---

### 3.5.3 Yleistetty kahden suodattimen kaava

Yleistetty kahden suodattimen kaava (Generalised Two-Filter Formula, GTFF) on kahden suodattimen kaavan laajennus myös epälineaarisiin tila- ja mittausmalleihin, joiden kohinat eivät ole normaalijakautuneita. Kahden suodattimen kaavaa ei voida kaavan (3.2.4) mukaisessa muodossa käyttää partikkelisiloitukseen, koska jakauma  $p(y_{t:T} | x_t)$  ei ole todennäköisyysfunktio muuttujan  $x_t$  suhteen ja on mahdollista, että  $\int p(y_{t:T} | x_t) dx_t = \infty$  [5, s. 71].

GTFF-siloituksessa aikasarjassa taaksepäin lasketaan jakaumat  $\tilde{p}(x_t | y_{t:T})$  käyttämällä apuna ns. keinotekoisia jakaumia  $\tilde{p}(x_t)$  [5, s. 66-67]. Keinotekoiset jakaumat valitaan siten, että ne toteuttavat ehdon

$$p(y_{t:T} | x_t) > 0 \Rightarrow \tilde{p}(x_t) > 0, \quad (3.5.10)$$

sekä ehdon

$$p(x_t) = \int p(x_0) \prod_{k=1}^T p(x_k|x_{k-1}) dx_{1:t-1} > 0 \Rightarrow \tilde{p}(x_t) > 0, \quad (3.5.11)$$

missä  $p(x_0)$  on alkutilan jakauma [5, s. 66], [9, s. 664].

Kirjoitetaan seuraavaksi yhtälöt jakaumien  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  laskemiseksi. Keinotekoisien jakauman ja Bayesin säännön (2.2.5) avulla saadaan ajanhetkelle  $T$

$$\tilde{p}(x_T|y_T) = \frac{\tilde{p}(x_T)p(y_T|x_T)}{\int \tilde{p}(x_T)p(y_T|x_T)dx_T}. \quad (3.5.12)$$

Ajanhetken  $t$  yhteisjakauma  $\tilde{p}(x_{t:T}|y_{t:T})$  voidaan puolestaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{p}(x_{t:T}|y_{t:T}) = \frac{\tilde{p}(x_t) \prod_{k=t+1}^T p(x_k|x_{k-1}) \prod_{k=t}^T p(y_k|x_k)}{\tilde{p}(y_{t:T})}, \quad (3.5.13)$$

missä

$$\tilde{p}(y_{t:T}) = \int \dots \int \tilde{p}(x_t) \left( \prod_{k=t+1}^T p(x_k|x_{k-1}) \right) \left( \prod_{k=t}^T p(y_k|x_k) \right) dx_{t:T} \quad (3.5.14)$$

on normalisointitekijä. Kirjoitetaan vielä  $\tilde{p}(x_{t:T}|y_{t:T})$  rekursiiviseen muotoon, sillä sitä tarvitaan myöhemmin kahden suodattimen kaavan SMC-aproksimaatiossa, kun johdetaan rekursiivinen lauseke painojen laskemiseksi. Lauseke (3.5.13) voidaan kirjoittaa rekursiivisesti muodossa

$$p(x_{t:T}|y_{t:T}) = \tilde{p}(x_t)p(x_{t+1}|x_t)p(y_t|x_t)\frac{p(x_{t+1:T}|y_{t+1:T})}{\tilde{p}(x_{t+1})}. \quad (3.5.15)$$

Ennustusaskel jakauman  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  laskemiseksi on muotoa

$$\tilde{p}(x_t|y_{t+1:T}) = \int p(x_{t+1}|y_{t+1:T}) \frac{p(x_{t+1}|x_t)\tilde{p}(x_t)}{\tilde{p}(x_{t+1})} dx_{t+1} \quad (3.5.16)$$

ja päivitysaskel on puolestaan muotoa

$$\tilde{p}(x_t|y_{t:T}) = \frac{p(y_t|x_t)\tilde{p}(x_t|y_{t+1:T})}{\int p(y_t|x_t)\tilde{p}(x_t|y_{t+1:T})dx_t} \quad (3.5.17)$$

[5, s. 67]. Siloituskajaukat  $p(x_t|y_{1:T})$  voidaan laske priorijakaumien, sekä jakaumien  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  avulla käyttäen yleistettyä kahden suodattimen kaavaa.

**Määritelmä 7. (Yleistetty kahden suodattimen kaava)** Kun  $t = 0$ , niin siloitettu jakauma voidaan laskea yhtälöstä

$$p(x_0|y_{1:T}) \propto \frac{p(x_0)\tilde{p}(x_0|y_{1:T})}{\tilde{p}(x_0)} \quad (3.5.18)$$

missä  $p(x_0)$  on alkutilan jakauma. Kun  $t \in 0, 1, 2, \dots, T$ , niin siloitettut jakaumat voidaan laskea yhtälöstä

$$p(x_t|y_{1:T}) \propto \frac{p(x_t|y_{1:t-1})\tilde{p}(x_t|y_{t:T})}{\tilde{p}(x_t)}, \quad (3.5.19)$$

missä priorijakaumat  $p(x_t|y_{1:t-1})$  saadaan suodatuksesta aikasarjassa eteenpäin ja jakaumat  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  suodattamalla aikasarjassa taaksepäin. On hyvä huomata, että jos valitaan  $\tilde{p}(x_0) = p(x_0)$ , niin  $p(x_0|y_{1:T}) \propto \tilde{p}(x_0|y_{1:T})$ . [5, s. 68]

GTFF-siloituksen SMC-aproksimaatio tehdään kahdella partikkelipilvellä, joista ensimmäistä  $(x, W)$  käytetään suodatukseen aikasarjassa eteenpäin aproksimoimaan priorijakaumia  $p(x_t|y_{1:t-1})$  ja toista  $(\tilde{x}, \tilde{W})$  aikasarjassa taaksepäin tapahtuvaan suodatukseen aproksimoimaan jakaumia  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$ . Jakauman  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  aproksimoimiseksi käytetään aikasarjassa taaksepäin etenevää informaatiopartikkelisuodatinta (Generalized Backward Information filter, GBIF).

Johdetaan lauseke painojen laskemiseksi rekursiivisesti. Kirjoitetaan ehdokasjakauma muodossa

$$\tilde{q}(x_{t:T}|y_{t:T}) = \tilde{q}(x_t|x_{t+1:T}, y_{t:T})\tilde{q}(x_{t+1:T}|y_{t+1:T}), \quad (3.5.20)$$

jolloin ajanheken  $t$  partikkelien  $\tilde{x}_t$  normalisoimattomat painot  $\tilde{w}_t$  voidaan laskea rekursiivisesti muodossa

$$\tilde{w}_t = \frac{p(\tilde{x}_{t:T}|y_{t:T})}{\tilde{q}(\tilde{x}_{t:T}|y_{t:T})} \quad (3.5.21)$$

$$= \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t)p(\tilde{x}_{t+1}|\tilde{x}_t)p(y_t|\tilde{x}_t)p(\tilde{x}_{t+1:T}|y_{t+1:T})}{\tilde{q}(\tilde{x}_t|\tilde{x}_{t+1:T}, y_{t:T})\tilde{q}(\tilde{x}_{t+1:T}|y_{t+1:T})\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1})} \quad (3.5.22)$$

$$= \frac{p(\tilde{x}_{t+1:T}|y_{t+1:T})}{\tilde{q}(\tilde{x}_{t+1:T}|y_{t+1:T})} \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t)p(\tilde{x}_{t+1}|\tilde{x}_t)p(y_t|\tilde{x}_t)}{\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1})\tilde{q}(\tilde{x}_t|\tilde{x}_{t+1:T}, y_{t:T})} \quad (3.5.23)$$

$$= \tilde{w}_{t+1} \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t)p(\tilde{x}_{t+1}|\tilde{x}_t)p(y_t|\tilde{x}_t)}{\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1})\tilde{q}(\tilde{x}_t|\tilde{x}_{t+1:T}, y_{t:T})}. \quad (3.5.24)$$

Jos vastaavin perustein, kuin kappaleessa 2.4.3 ehdokasjakaumina käytettiin jakaumia  $q(x_t^i|x_{t-1}^i, y_t)$ , käytetään taaksepäin suodatuksessa ehdokasjakaumina  $\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t+1}^i, y_t)$ , niin algoritmi informaatiopartikkelisuodattimelle saadaan seuraavaan muotoon (algoritmi 7) [5, s. 72].

---

**Algoritmi 7** Informaatiopartikkelisuodatin aikasarjassa taaksepäin

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$ .

Partikkelien määrä  $N$  ja ehdokasjakaumat  $\tilde{q}(\tilde{x}_t|\tilde{x}_{t+1}, y_t)$

Uudelleennäytteistyskynnyksen kynnysarvo  $\text{ess}_k$

1. Asetetaan  $t = T$ , sekä

- Generoidaan partikkelit  $\tilde{x}_t^i$  ehdokasjakaumasta  $\tilde{q}(x_t|y_t)$ .
- Lasketaan painot  $\tilde{w}_t^i \propto \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t^i|y_t)}{\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|y_t)} \propto \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t^i)p(y_t|\tilde{x}_t^i)}{\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|y_t)}$ .
- Normalisoidaan painot.
- Lasketaan odotusarvo  $\tilde{m}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i \tilde{x}_t^i$
- Lasketaan kovarianssimatriisi  $\tilde{P}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i (\tilde{x}_t^i - \tilde{m}_t)(\tilde{x}_t^i - \tilde{m}_t)^T$
- Jos  $\text{ESS} < \text{ess}_k$ , niin tehdään uudelleennäytteistys.

2. Asetetaan  $t = t - 1$ , sekä

- Generoidaan partikkelit  $\tilde{x}_t^i$  ehdokasjakaumasta  $\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t+1}^i, y_t)$ .
- Lasketaan painot

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^i &\propto \tilde{W}_{t+1}^i \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_{t:t+1}^i|y_{t:T})}{\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1}^i|y_{t+1:T})\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t+1}^i, y_t)} \\ &= \tilde{W}_{t+1}^i \frac{\tilde{p}(\tilde{x}_t^i)p(y_t|\tilde{x}_t^i)p(\tilde{x}_{t+1}^i|\tilde{x}_t^i)}{\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1}^i)\tilde{q}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t+1}^i, y_t)} \end{aligned}$$

- Normalisoidaan painot.
- Lasketaan odotusarvo  $\tilde{m}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i \tilde{x}_t^i$
- Lasketaan kovarianssimatriisi  $\tilde{P}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i (\tilde{x}_t^i - \tilde{m}_t)(\tilde{x}_t^i - \tilde{m}_t)^T$
- Jos  $\text{ESS} < \text{ess}_k$ , niin tehdään uudelleennäytteistys.

3. Jos  $t = 0$ , niin lopetetaan, muuten palataan kohtaan 2.

---

Jakaumien  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  SMC-aproksimaatiot voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{p}(x_t|y_{t:T}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i \delta(x_t - \tilde{x}_t^i). \quad (3.5.25)$$

Johdetaan nyt priorijakaumien ja jakaumien  $\tilde{p}(x_t|y_{t:T})$  SMC-aproksimaatioista kahden suodattimen kaavan aproksimaatio. Priorijakauman  $p(x_t|y_{1:t-1})$  SMC-aproksimaatio saadaan yhtälön (3.5.7) perusteella muotoon

$$p(x_t|y_{1:t-1}) \approx \sum_{i=1}^N W_{t-1}^i p(x_t|x_{t-1}). \quad (3.5.26)$$

Sijoittamalla aproksimaatiot (3.5.25) ja (3.5.26) yleistetyn kahden suodattimen kaavaan (3.5.19) saadaan siloitettut jakaumat  $p(x_t|y_{1:T})$  kirjoitettua muodossa

$$p(x_t|y_{1:T}) \approx \frac{\sum_{i=1}^N W_{t-1}^i p(\tilde{x}_t^j|x_{t-1}^i) \sum_{j=1}^N \tilde{W}_t^j \delta(x_t - \tilde{x}_t^j)}{\tilde{p}(\tilde{x}_t^j)} \quad (3.5.27)$$

$$= \sum_{j=1}^N \tilde{W}_t^j \sum_{i=1}^N W_{t-1}^i \frac{p(\tilde{x}_t^j|x_{t-1}^i)}{\tilde{p}(\tilde{x}_t^j)} \delta(x_t - \tilde{x}_t^j) \quad (3.5.28)$$

$$= \sum_{j=1}^N W_{t|T}^j \delta(x_t - \tilde{x}_t^j), \quad (3.5.29)$$

missä

$$W_{t|T}^j = \tilde{W}_t^j \sum_{i=1}^N W_{t-1}^i \frac{p(\tilde{x}_t^j|x_{t-1}^i)}{\tilde{p}(\tilde{x}_t^j)} \quad (3.5.30)$$

ovat uudet painot ajanhetkelle  $t$ . Algoritmi GTFF-siloitukselle on esitetty seuraavassa (algoritmi 8).

---

**Algoritmi 8** GTFF-silotus

---

Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$

Tilamalli  $\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$

Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$

Mittaukset  $y_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$ .

Partikkelien määrä  $N$

1. Tehdään partikkelisuodatus aikasarjassa eteenpäin ja tallennetaan partikkelit  $x$  sekä painot  $W$ .
2. Tehdään partikkelisuodatus aikasarjassa taaksepäin ja tallennetaan partikkelit  $\tilde{x}$  sekä painot  $\tilde{W}$ .
3. Asetetaan  $t = 0$  ja lasketaan siloitettun jakauman  $p(x_t|y_{1:T})$  odotusarvo ja kovarianssimatriisi. Valinnalla  $\tilde{p}(x_t) = p(x_t)$  saadaan estimaateiksi

- $m_t^s \approx \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i \tilde{x}_t^i$
- $P_t^s \approx \sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i (\tilde{x}_t^i - m_t^s)(\tilde{x}_t^i - m_t^s)^T$

4. Asetetaan  $t = t + 1$  ja lasketaan painot

$$W_{t|T}^j = \tilde{W}_t^j \sum_{i=1}^N W_{t-1}^i \frac{p(\tilde{x}_t^j|x_{t-1}^i)}{\tilde{p}(\tilde{x}_t^j)}$$

5. Lasketaan odotusarvo  $m_t^s = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_{t|T}^i \tilde{x}_t^i$

6. Lasketaan kovarianssimatriisi  $P_t^s = \sum_{i=1}^N \tilde{W}_{t|T}^i (\tilde{x}_t^i - m_t^s)(\tilde{x}_t^i - m_t^s)^T$

7. Jos  $t = T$ , niin lopetetaan. Muuten palataan kohtaan 4.
- 

### 3.5.4 Ehdokasjakauman ja keinotekoisen jakauman valinnasta

GTFF-siloituksessa tarvitaan ehdokasjakauma paitsi partikkelisuodatuksen aikasarjassa eteenpäin, niin myös taaksepäin. Painojen varianssit minimoiva ehdokasjakauma  $q(x_t|x_{t+1}^i, y_t)_{\text{opt}}$  aikasarjassa taaksepäin tapahtuvaan partikkelisuodatuksen on muotoa

$$q(x_t|x_{t+1}^i, y_t)_{\text{opt}} \propto p(y_t|x_t) \frac{\tilde{p}(x_t)p(x_{t+1}|x_t)}{\tilde{p}(x_{t+1})}. \quad (3.5.31)$$

[5, s. 74]. Mikäli optimaalista ehdokasjakaumaa ei pystytä analyttisesti ratkaisemaan voidaan käyttää sen aproksimaatioita [5, s. 73-74].

Keinotekoiset jakaumat  $\tilde{p}(x_t)$  voidaan valita vapaasti, kunhan ne toteuttavat ehdot (3.5.10) ja (3.5.11). Yleistetyn kahden suodattimen kaavan toimivuuden kannalta on tärkeää valita keinotekoiset jakaumat siten, että eteenpäin ja taaksepäin suodatuksessa käytettävien partikkelipilvien suurinta todennäköisyyttä vastaavat alueet



pyritään saamaan lähelle toisiaan. Yksi vaihtoehto on käyttää keinotekoisina jakauksina

$$\tilde{p}(x_t) = \int \tilde{p}(x_{t-1})p(x_t|x_{t-1})dx_{t-1}, \quad (3.5.32)$$

kun valitaan  $\tilde{p}(x_0) = p(x_0)$  [5, s. 69].

# Luku 4

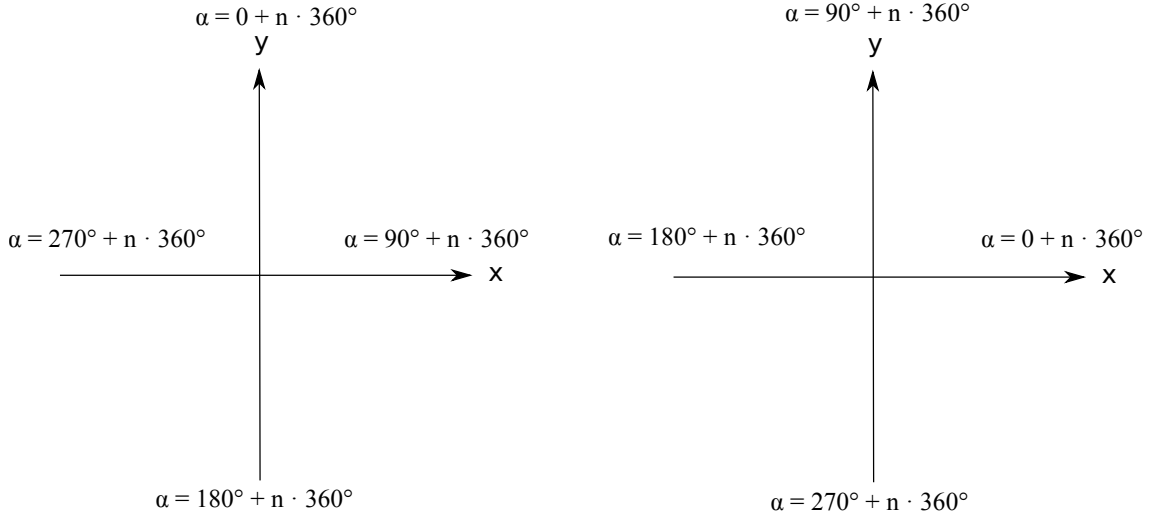
## Tila- ja mittausmallit

### 4.1 Kävelijän liikkeen mallintaminen

Tässä työssä prosessin tila  $\mathbf{x}_t$  kuvaa kävelijän etenemistä tasossa ajanhetkellä  $t$ . Tilaa estimoidaan aikasarjassa askeleen lukumäärän mittauksista  $\beta$ , sekä kulman muutosmittauksista  $\Delta\alpha$  ja WLAN-mittauksista. Partikkelisuodattimen ja partikkelisiloittimien tilaestimaatti on neljäkomponenttinen vektori

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ \alpha_t \\ l_t \end{bmatrix}, \quad (4.1.1)$$

missä  $x_t, y_t \in \mathbb{R}$  ovat tilaestimaatin koordinaatit tasossa,  $\alpha_t \in \mathbb{R}$  on suuntakulma tasossa radiaaneina ja  $l_t \geq 0$  on askeleen pituus. Tässä työssä tason koordinaatistona on käytetään simulaatioissa omaa koordinaatistoaan ja todellisessa testitapauksessa rakennuksen paikallista ENU-koordinaatistoa. (kuva 4.1).



Kuva 4.1: Kuvassa vasemmalla ENU-koordinaatisto, jota käytetään tässä työssä todellisiin testitapauksiin ja oikealla simulaatioissa käytetty koordinaatisto ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Prosessin tilamalli on epälineaarinen sekä diskreettiaikainen ja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}, \tilde{\mathbf{w}}_{t-1}), \quad (4.1.2)$$

missä  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{x}_{t-1} \in \mathbb{R}^4$  sekä  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1} \in \mathbb{R}^4$  ovat vektoreita ja  $f_{t-1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  vektoriarvoinen tilan funktio. Tilamallin kohina  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1}$  ei ole additiivinen. Kirjoitetaan seuraavaksi tilamalli auki, käyttäen työn simulaatioiden koordinaatistoa. Vastaa- vasti voidaan tilamalli kirjoittaa auki ENU-koordinaatiston tapauksessa. Merkitään ajanhetken  $t - 1$  paikkaa  $\mathbf{r}_{t-1} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$ , jolloin (4.1.2) voidaan kirjoittaa auki muodossa

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{t-1} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1} + \tilde{w}_{t-1,3}) \\ \sin(\alpha_{t-1} + \tilde{w}_{t-1,3}) \end{bmatrix} \beta_{t-1}(l_{t-1} + \tilde{w}_{t-1,4}) \\ \alpha_{t-1} + \Delta\alpha \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{t-1,1:2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{t-1,3:4} \end{bmatrix}, \quad (4.1.3)$$

missä  $\beta$  on askelten lukumäärän mittausta,  $\Delta\alpha$  kulman muutoksen mittausta, vektori  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,1:2}$  sisältää koordinaattien ja vektori  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,3:4}$  kulmanmuutosmittauksen sekä askelpituuden kohinat. Kohinat oletetaan nollakeskiseksi ja normaalijakautuneiksi:  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,1:2} \sim N(0, \tilde{Q}_{t-1,1:2})$  ja  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,3:4} \sim N(0, \tilde{Q}_{t-1,3:4})$ . Lisäksi koordinaattien kohina  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,1:2}$  oletetaan tässä riippumattomaksi kulmanmuutoksen ja askeleen pituuden kohinasta ja sillä mallinnetaan muita paikkaan vaikuttavia virhetekijöitä. Lineari-

soidaan tilamalli. Kun oletetaan, että kohinat  $\tilde{w}_{t-13}$  ja  $\tilde{w}_{t-14}$  ovat pieniä, niin saadaan

$$\mathbf{x}_t \approx \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{t-1} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1}) + (-\sin(\alpha_{t-1}))\tilde{w}_{t-13} \\ \sin(\alpha_{t-1}) + \cos(\alpha_{t-1})\tilde{w}_{t-13} \end{bmatrix} (l_{t-1} + \tilde{w}_{t-14})\beta_{t-1} \\ \alpha_{t-1} + \Delta\alpha \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{t-11:2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{t-13:4} \end{bmatrix} \quad (4.1.4a)$$

$$\approx \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{t-1} + \left( \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1}) \\ \sin(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} l_{t-1} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1}) \\ \sin(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} \tilde{w}_{t-14} + \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_{t-1}) \\ \cos(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} l_{t-1} \tilde{w}_{t-13} \right) \beta_{t-1} \\ \alpha_{t-1} + \Delta\alpha \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{t-11:2} \\ \tilde{\mathbf{w}}_{t-13:4} \end{bmatrix}. \quad (4.1.4b)$$

Nyt tilamalli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{x}_t = f_{t-1}(x_{t-1}) + \mathbf{w}_{t-1}, \quad (4.1.5)$$

joka auki kirjoitettuna on muotoa

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{t-1} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1}) \\ \sin(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} \beta_{t-1} l_{t-1} \\ \alpha_{t-1} + \Delta\alpha \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{t-1}, \quad (4.1.6)$$

missä kohina  $\mathbf{w}_{t-1}$  on muotoa

$$\mathbf{w}_{t-1} = C_{t-1} \tilde{\mathbf{w}}_{t-13:4} + \tilde{\mathbf{w}}_{t-11:2}, \quad (4.1.7)$$

kun

$$C_{t-1} = \begin{bmatrix} A_{2_{t-1}} & A_{1_{t-1}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.8)$$

$$A_{1_{t-1}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{t-1}) \\ \sin(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} \beta_{t-1} \quad (4.1.9)$$

ja

$$A_{2_{t-1}} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_{t-1}) \\ \cos(\alpha_{t-1}) \end{bmatrix} \beta_{t-1} l_{t-1}. \quad (4.1.10)$$

Tällöin ajanhetken  $t - 1$  kohina on muotoa

$$\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1}), \quad (4.1.11)$$

missä  $Q_{t-1} = C_{t-1} \tilde{Q}_{t-1:3:4} C_{t-1}^T + \tilde{Q}_{t-1:1:2}$  [17, s. 22].

Tilamallissa on otettava huomioon myös kartta eli pohjapiirustus, sillä rakennuksen rakenteet rajoittavat liikkumista sisätiloissa. Rakenteet otetaan huomioon tarkastelemalla ennustettua partikkelin  $x_t^i$  paikkaa  $\mathbf{r}_t^i$  ajanhetkellä  $t$  ja sitä edeltävän ajanhetken  $t - 1$  paikkaa  $\mathbf{r}_{t-1}^i$ . Mikäli liikkuminen on tapahtunut esimerkiksi seinän läpi, niin partikkelin  $x_t^i$  jakaumaa  $p(x_t^i | x_{t-1}^i)$  painotetaan pienellä termillä  $\epsilon \geq 0$ .

$$p(x_t^i | x_{t-1}^i) = \begin{cases} \epsilon \cdot N(x_t^i | f_{t-1}(x_{t-1}^i), Q_{t-1}) & \text{jos partikkeli } x^i \text{ kulkee seinän läpi,} \\ N(x_t^i | f_{t-1}(x_{t-1}^i), Q_{t-1}) & \text{muuten.} \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Tässä työssä seinien läpäisemiselle jätetään pieni todennäköisyys ( $\epsilon \neq 0$ ) kartassa mahdollisesti olevien virheiden vuoksi. Tämä mallinnustapa tuo myös joustavuutta tilanteisiin, joissa virheellisistä mittauksista johtuen kaikki partikkelit törmäävät seinään. Huomattava on, että kaavassa (4.1.12) tarkastellaan partikkelin liikkumista aikasarjassa eteenpäin tapahtuvassa suodatuksessa. Vastaavasti voidaan partikkeleita painottaa aikasarjassa taaksepäin tapahtuvassa suodatuksessa (algoritmi 7).

## 4.2 Lineaarinen tilamalli

Tämän työn ensimmäisessä simulaatiossa verrataan RTS-siloittimen sekä FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikannustuloksia testireitillä, jossa ei huomioida karttatietoa. Jotta analyttiset ratkaisut voidaan saada ratkaistua Kalmanin suodatimella ja siloittimella, niin sekä tila- että mittaussmallien tulee olla lineaarisia ja mallien virheiden normaalijakautuneita. Tilamalli voidaan kirjoittaa lineaarisena, kun oletetaan että kaikki mittaukset ovat tallessa tarkasteltavalle reitille, jolloin se saadaan muotoon

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{t-1} \\ 0 & 1 & 0 & b_{t-1} \\ 0 & 0 & c_{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \alpha_{t-1} \\ l_{t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{t-1}, \quad (4.2.1)$$

missä  $a_{t-1} = \cos \alpha_{t-1} \beta_{t-1}$ ,  $b_{t-1} = \sin \alpha_{t-1} \beta_{t-1}$  ja  $c_{t-1} = 1 + \frac{\Delta \alpha}{\alpha_{t-1}}$ .

### 4.3 Mittausmalli

Tässä työssä prosessin tilan estimointiin käytetään kulman muutos ja askelmittausten lisäksi WLAN-paikkamittausta. Työn todellisilla mittauksilla toteutetuissa testitapauksissa käytetään sormenjälkimenetelmää paikannukseen, joka perustuu RSS-mittauksiin. RSS-mittaukset eivät sinällään eivät ole paikkamittauksia, mutta niitä voidaan käyttää paikantamiseen signaalin vaimenemiseen perustuvan mallin ja bayeslaisten menetelmien avulla [10, s. 9-10]. Työn simulaatioissa käytettävien paikkamittausten mittausmalli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{y}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad (4.3.1)$$

missä mittausmatriisi  $H_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ja mittauksen virhe oletetaan nollakeskeiseksi ja normaalijakautuneeksi  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$ .

# Luku 5

## Tulokset

### 5.1 Partikkelisiloitusmenetelmien testaaminen

Partikkelisiloitusmenetelmiä testataan simuloiduilla mittauksilla kolmessa testitapauksessa, sekä niiden lisäksi FFBS-siloitusta testataan todellisilla mittauksilla, joita on kerätty Tampereen teknillisellä yliopistolla (TTY). Testeissä oletetaan, että alkutila tiedetään ja partikkelisuodatin alustetaan sen perusteella. Partikkelisiloituksessa käytetään kiinteän välin siloitusta, jossa ensin suodatetaan tilan estimaatit koko reitille ja sen jälkeen lasketaan siloitettut estimaatit ehdolla koko reitin mittaukset. Mittaukset ja siloitukseen tarvittavat suodatuksen parametrit tallennetaan muistiin siloitusta varten. Partikkelisuodatus ja partikkelisiloitusmenetelmiä käytettäessä yksittäisen ajon tulokset eivät tietenkään riitä vaan tarvitaan useita toistoja. Tämän työn simulaatioissa ja testitapauksissa todellisilla mittauksilla kunkin reitin tulokset lasketaan sadan toiston perusteella.

### 5.2 Mallit, sekä ehdokas- ja keinotekoiset jakaumat simulaatioissa

Tämän työn simulaatiot tehdään MATLAB-ohjelmistolla. Ensimmäinen simulaatio tehdään ilman karttatietoa ja siinä verrataan partikkelisiloittimien sekä RTS-siloittimen paikannustuloksia. Toinen ja kolmas simulaatio tehdään käyttäen karttatietoa ja niissä vertaillaan partikkelisuodattimen ja partikkelisiloittimien tuloksia. Tosireitti lasketaan alkupaikan, sekä jokaiselle ajanhetkelle asetettujen suuntakulmien perusteella käyttäen askelpituutta 0.6 m. Kulmanmuutosmittaukset generoidaan lisäämällä kohinaa kahden peräkkäisen ajanhetken suuntakulmien erotukseen. Simulaatiossa oletetaan, että kullakin ajanhetkellä otetaan yksi askel. WLAN-

mittaukset simuloidaan joka kymmenennelle ajanhetkelle. Simuloinnissa käytetään kyseisen ajanhetken tosipaikkaa sekä varianssia  $(5 \text{ m})^2$ .

Simulaatiot tehdään sekä 100:lla, että 1000:lla partikkelilla. Alkutilan kovarianssimatriisiksi simulaatioissa asetetaan

$$P_0 = \begin{bmatrix} (2 \text{ m})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2 \text{ m})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (10^\circ \frac{\pi}{180^\circ})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.01 \text{ m})^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Tilamallina käytetään kaavan (4.1.6) mukaista mallia, jossa kulmanmuutoksen sekä askeleen pituuden kohinan kovarianssiksi asetetaan

$$Q_{t-13:4} = \begin{bmatrix} (0.1)^2 & 0 \\ 0 & (0.01 \text{ m})^2 \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

ja koordinaattien kohinan  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-11:2}$  kovarianssiksi puolestaan

$$\tilde{Q}_{t-11:2} = \begin{bmatrix} (0.6 \text{ m})^2 & 0 \\ 0 & (0.6 \text{ m})^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2.3)$$

Matriisissa  $C_{t-1}$  (kaava 4.1.8) käytetään kulmana  $\alpha_{t-1}$  ajanhetken tilan  $\mathbf{x}_{t-1}$  kulmaestimaattia. WLAN-mittauksille käytetään kaavan (4.3.1) mittaussmallia. Ehdo-  
kasjakaumana partikkelisuodatuksessa aikasarjassa eteenpäin (algoritmi 2) käytetään jakaumaa  $p(x_t|x_{t-1})$ , jolloin partikkelin  $x_t^i$  normalisoimaton paino saadaan laskettua kaavalla

$$w_t^i = W_t^i p(y_t|x_t^i). \quad (5.2.4)$$

Aikasarjassa taaksepäin tapahtuvassa partikkelisuodatuksessa keinotekoisina jakauksina käytetään jakaumia

$$\tilde{p}(x_t) = N(x_t|m_t, P_t), \quad (5.2.5)$$

missä  $m_t$  on aikasarjassa eteenpäin tapahtuvan partikkelisuodatuksen ajanhetken  $t$  posteriorijakauman odotusarvo ja  $P_t$  posteriorijakauman kovarianssimatriisi. Kun keinotekoiset jakaumat valitaan näin, niin partikkelien  $\tilde{x}$  painottamisessa huomioidaan informaatiota aikasarjassa eteenpäin tapahtuvasta suoduksesta myös WLAN-mittauksista, mikä nähdään yhtälöstä (2.2.8). Tällä valinnalla pyritään siihen, että aikasarjassa eteenpäin ja taaksepäin suodatuksen partikkelipilvien todennäköisimmät alueet saataisiin lähelle toisiaan. Mikäli yhtälön (3.5.32) mukaista jakaumaa käytettäisiin, niin keinotekoinen jakauma ei sisältäisi informaatiota WLAN-mittauksista ja vastaisi käytännössä sitä, että keinotekoiset jakaumat valittaisiin pelkän PDR-menetelmän estimaattien perusteella ja kuten johdannossa todettiin, niin



pelkän PDR:n käyttäminen sisätilapaikannukseen on ongelmallista. Lisäksi jakaumat  $\tilde{p}(x)$  valitaan vakiohäntäisiksi ja paksuhäntäisemmiksi kuin jakaumat  $p(x_t|x_{t-1})$  [5, s. 68]. Käytännössä normaalijakauman tiheysfunktio saadaan vakiohäntäiseksi asettamalla

$$\max(N(x|m, P), \text{limit}), \quad (5.2.6)$$

missä *limit* on alaraja tiheysfunktion arvolle.

Ehdokasjakaumana aikasarjassa taaksepäin tapahtuvassa partikkelisuodatuksessa käytetään viimeiselle ajanhetkelle  $T$  normaalijakaumaa suodatuksen posteriorijakauman estimaatein ja muille ajanhetkille jakauman  $\tilde{p}(x)p(x_{t+1}|x_t)$  aproksimaatioita, joka saadaan käyttämällä jakauman  $p(x_{t+1}|x_t)$  ensimmäisen asteen Taylorin polynomia kehityskeskuksesta  $m_t$ . Linearisoinnin myötä saadaan

$$p(x_{t+1}|x_t) = N(x_t|m_t + K_t(x_{t+1} - f_t(m_t)), P_t - K_t F_t P_t), \quad (5.2.7)$$

missä  $K_t = P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + R_t)^{-1}$  ja Jacobin matriisi on muotoa

$$F_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(m_{t3})m_{t4} & \cos(m_{t3}) \\ 0 & 1 & \cos(m_{t3})m_{t4} & \sin(m_{t3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Tällä ehdokasjakauman valinnalla partikkelin  $\tilde{x}_t^i$  normalisoimaton paino saadaan muotoon

$$\tilde{w}_t^i \approx \tilde{W}_{t+1}^i \frac{p(y_t|\tilde{x}_t^i)}{p(\tilde{x}_{t+1})}. \quad (5.2.9)$$

Efektiiivisten painojen lukumäärien kynnysarvoina käytettiin 100:n partikkelin simulaatioissa  $\text{ess}_k=30$  ja 1000:n partikkelin simulaatioissa  $\text{ess}_k=300$ .

FFBS- sekä GTFF-partikkelisiloitusmenetelmissä lasketaan tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  (4.1.2) arvoja osana painojen laskentaa kaavoissa (3.5.9) ja (3.5.30). Tilamallin kohina oletetaan normaalisti jakautuneeksi, jolloin tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  on ohuthäntäinen ja liukulukuaritmetiikasta johtuen saattaa saada käytännön laskennassa arvon nolla. Tästä johtuen simulaatioissa käytetään tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  jakaumana vakiohäntäistä jakaumaa.

Laskennan keventämiseksi uusien painojen laskennassa ei huomioida enää karttatietoa tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  arvoja laskettaessa, kuten suodatusvaiheessa tehdään kaavan (4.1.12) mukaisesti. On hyvä huomata, että kaavoissa (3.5.9) ja (3.5.30) kuitenkin huomioidaan karttojen informaatio. FFBS-menetelmässä suodatuksen partikkeleita  $x$  ja GTFF-menetelmässä sekä eteenpäin, että taaksepäin suodatuksen

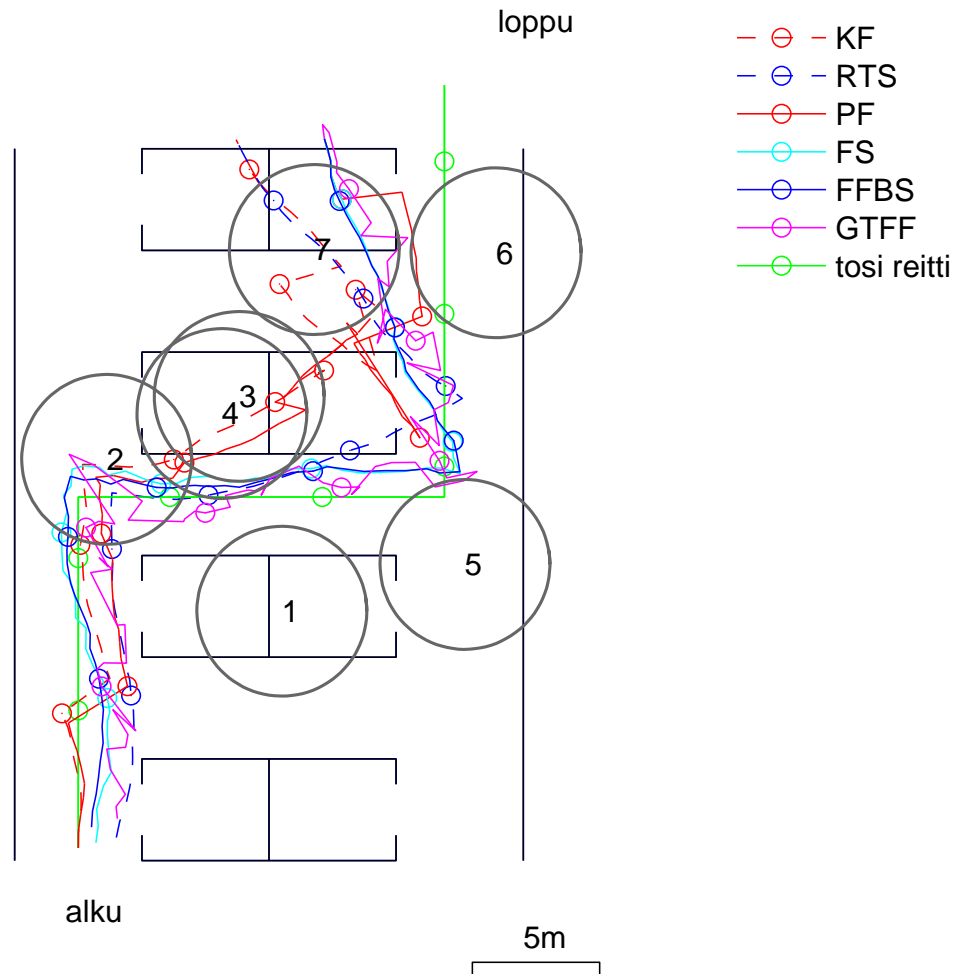
partikkeleita  $\tilde{x}$  painotetaan kaavan (4.1.12) mukaan. Simulaatioissa seinän läpi kulkevien partikkelien painottamiseen käytettiin arvoa  $\epsilon = 0.001$ .

### 5.3 Simulaatio ilman karttatietoa

Ensimmäisessä simulaatiossa verrataan partikkelisiloitusmenetelmiä Rauch-Tung-Striebel siloittimeen. Myös Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimen paikannustulokset lasketaan reitille, jolla ajanhetkien lukumäärä on  $T = 75$ . Simulaatio tehdään ilman karttatietoa, jolloin Kalmanin suodattimella ja RTS-siloittimella saadaan analyttisesti ratkaistua suodatettu ja siloitettu tilan estimaatti käyttäen tilamallia (4.2.1). Sadan ja tuhannen partikkelin simulaatioiden tulokset on koottu taulukoihin 5.2 ja 5.3. Simulaatiot on tehty käyttäen samoja WLAN-mittauksia. Kuvassa 5.1 on piirretty 100:n partikkelin simulaatiolle kaikkien tarkasteltavien menetelmien estimoidut yksittäiset reitit ja kuvassa 5.2 on puolestaan reittiestimaatit 1000:n partikkelin simulaatiossa. Kaikkiin simulaatioiden kuviin (kuvat 5.1–5.6) on piirretty lisäksi WLAN-mittausten 20%-todennäköisyysellipsit. Todennäköisyysellipsit on kuvissa merkitty numerojärjestykseen, niiden ajanhetken perusteella (taulukko 5.1).

Taulukko 5.1: WLAN-mittausten numerointi simulaatiokuvissa ajanhetkien perusteella.

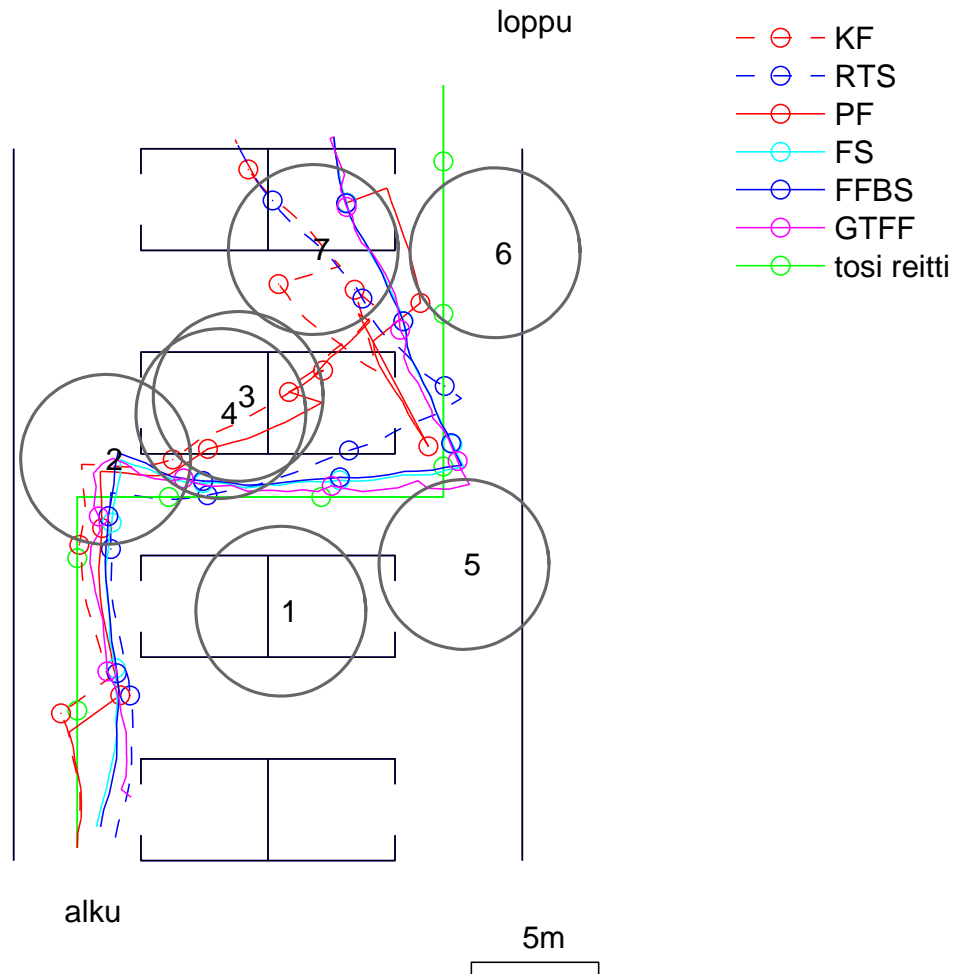
| numero | ajanhetki |
|--------|-----------|
| 1      | 10        |
| 2      | 20        |
| 3      | 30        |
| 4      | 40        |
| 5      | 50        |
| 6      | 60        |
| 7      | 70        |



Kuva 5.1: Kalmanin suodattimen, RTS-siloittimen, partikkelisuodattimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit ensimmäiselle reitille simulaatiossa ilman karttatietoa, kun partikkelien lukumäärä  $N = 100$ . Kunkin menetelmän estimoinnalla reitillä, joka kymmenes estimaatti on piirretty pallolla. Pallot vastaavat ajanhetkiä, jolloin saadaan WLAN-mittaus.

Taulukko 5.2: Paikannustulokset ensimmäisen testireitin 100:n partikkelin simulaatiolle ilman karttatietoa. Partikkelisuodattimelle, sekä FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimille on taulukoitu 100:n ajon keski- ja mediaanivirheiden, 95%-virhekvantiilien sekä laskenta-aikojen otoskeskiarvot sekä otoskeskihajonnat.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]         |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|------------------|
| KF   | 3.68            | 4.04              | 7.82            | 0.01             |
| RTS  | 3.19            | 2.49              | 7.43            | 0.01             |
| PF   | $2.40 \pm 0.28$ | $1.85 \pm 0.33$   | $6.11 \pm 0.74$ | $0.07 \pm 0.01$  |
| FS   | $2.05 \pm 0.34$ | $1.87 \pm 0.40$   | $4.43 \pm 0.72$ | $0.22 \pm 0.02$  |
| FFBS | $2.04 \pm 0.36$ | $1.90 \pm 0.41$   | $4.35 \pm 0.68$ | $6.61 \pm 0.48$  |
| GTFF | $2.08 \pm 0.27$ | $1.90 \pm 0.31$   | $4.51 \pm 0.92$ | $14.69 \pm 1.05$ |



Kuva 5.2: Kalmanin suodattimen, RTS-siloittimen, partikkelisuodattimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit ensimmäiselle reitille simulaatiossa ilman karttatietoa, kun partikkelien lukumäärä  $N = 1000$ .

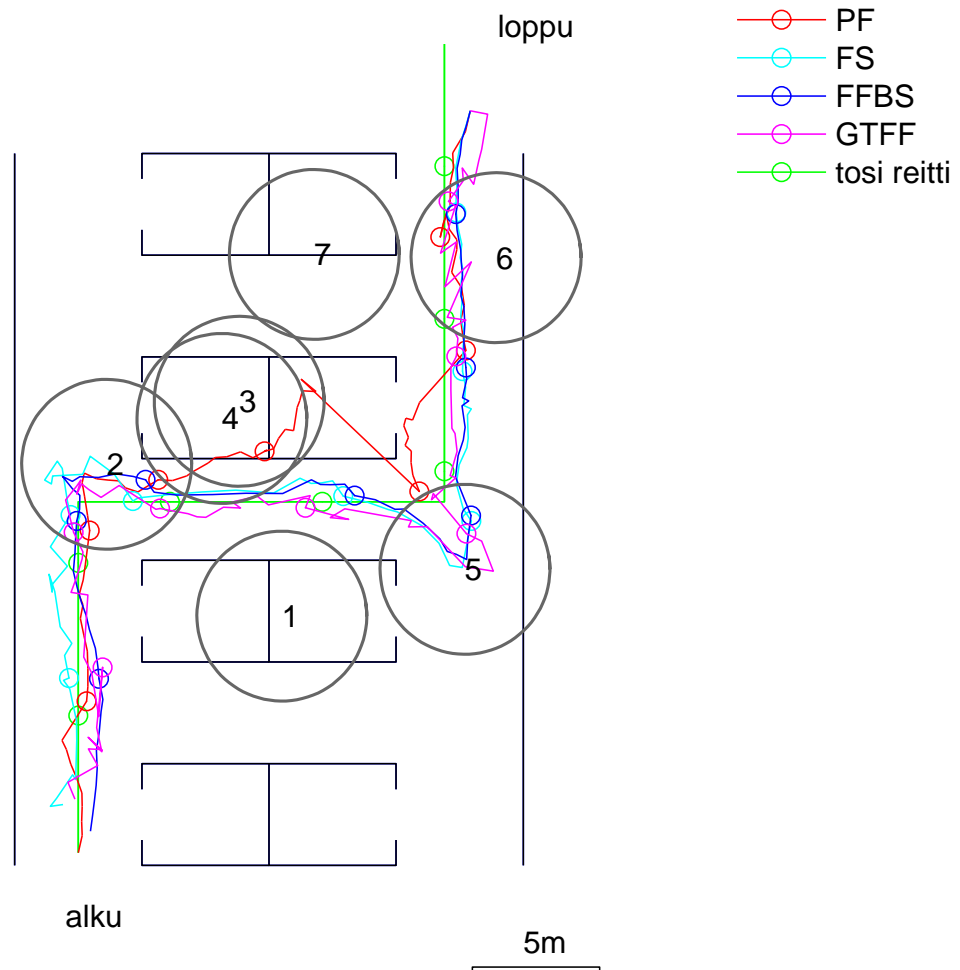
Taulukko 5.3: Paikannustulokset ensimmäisen testireitin 1000:n partikkelin simulaatiolle ilman karttatietoa.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]          |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| KF   | 3.68            | 4.04              | 7.82            | 0.01              |
| RTS  | 3.19            | 2.49              | 7.43            | 0.01              |
| PF   | $2.34 \pm 0.09$ | $1.65 \pm 0.10$   | $6.22 \pm 0.27$ | $0.55 \pm 0.08$   |
| FS   | $2.04 \pm 0.11$ | $1.91 \pm 0.12$   | $4.48 \pm 0.24$ | $1.47 \pm 0.01$   |
| FFBS | $1.99 \pm 0.10$ | $1.87 \pm 0.11$   | $4.32 \pm 0.23$ | $71.11 \pm 0.97$  |
| GTFF | $1.75 \pm 0.10$ | $1.68 \pm 0.14$   | $4.29 \pm 0.34$ | $123.74 \pm 0.86$ |

Ensimmäisessä simulaatiossa havaitaan partikkelisiloitusmenetelmillä estimoitujen reittien olevan lähellä teorian mukaista RTS-siloittimen analyttistä ratkaisua partikkelien määrän kasvaessa. Taulukoiden 5.2 ja 5.3 tuloksista huomataan, että Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimen reitit eroavat hieman toisistaan vaikka partikkelisuodattimen estimaattien tulisi lähestyä Kalmanin suodattimen estimaatteja partikkelien lukumäärän kasvaessa. Ero johtuu ilmeisesti siitä, että suodattimet huomioivat mittausinformaation hieman eri lailla, vaikka molemmille on pyritty käyttämään vastaavia malleja. Mikäli partikkelisuodattimien estimaatit lähestyisivät Kalmanin suodattimen estimaatteja, niin partikkelisiloittimien estimaatit lähestyisivät RTS-siloittimen estimaatteja. Merkille pantavaa on myös se, että GTFF-siloittimen estimoitu reitti on huomattavasti sileämpi partikkelien määrää nostettaessa 100:sta 1000:n.

## 5.4 Simulaatiot karttatietoa käyttäen

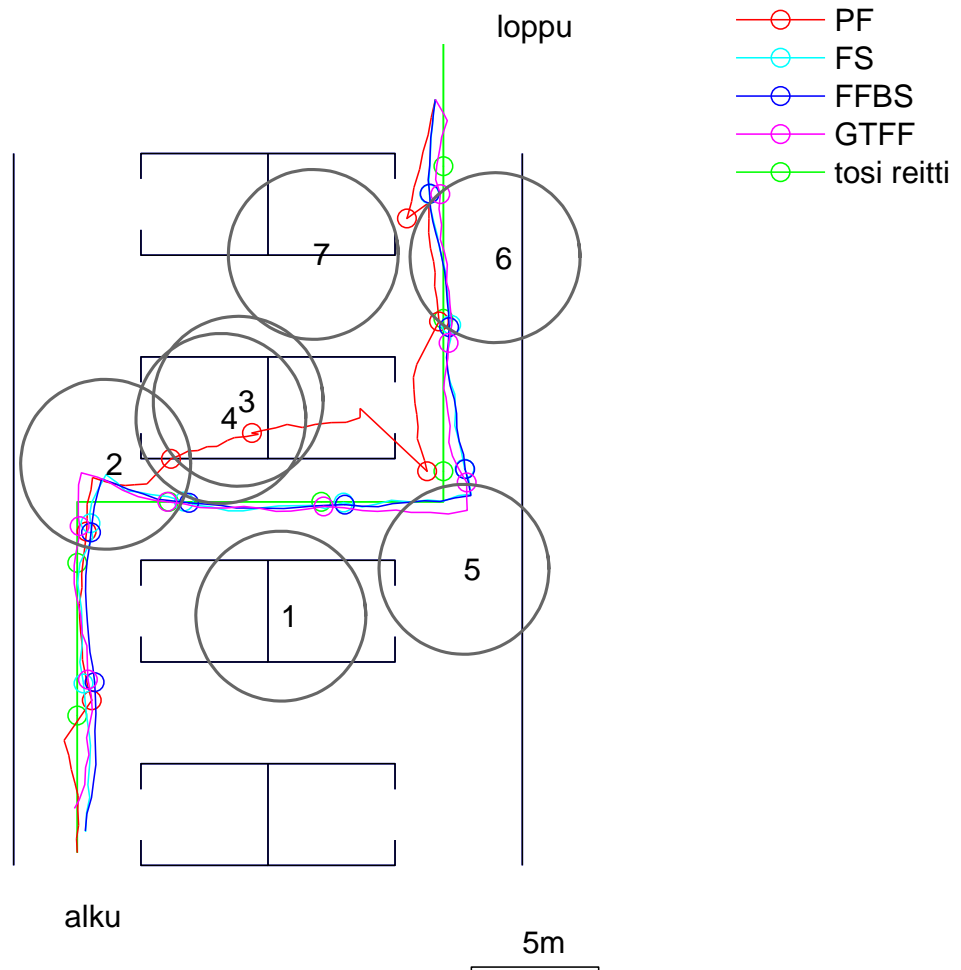
Samalle reitille tehdään samoja mittauksia käyttäen simulaatio karttatietoa käyttäen. Reittiä estimoidaan partikkelisuodattimella sekä FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimilla. Tulokset on koottu taulukoihin 5.4 ja 5.5. Simulaatioita havainnollistetaan kuvilla 5.3 ja 5.4.



Kuva 5.3: Partikkelisuodattimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit ensimmäiselle reitille simulaatiossa karttatietoa käyttäen, kun  $N = 100$ . Kunkin menetelmän estimoimalla reitillä, joka kymmenes estimaatti on piirretty pallolla. Pallot vastaavat ajanhetkiä, jolloin saadaan WLAN-mittaus.

Taulukko 5.4: Paikannustulokset ensimmäisen testireitin 100:n partikkelin simulaatiolle karttatietoa käyttäen. Estimointimenetelmille on taulukoitu 100:n ajon keski- ja mediaanivirheiden, 95%-virhekvantiilien sekä laskenta-aikojen otoskeskiarvot sekä otoskeskihajonnat.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]         |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|------------------|
| PF   | $1.72 \pm 0.44$ | $1.42 \pm 0.46$   | $4.19 \pm 1.45$ | $0.25 \pm 0.02$  |
| FS   | $1.35 \pm 0.48$ | $1.23 \pm 0.50$   | $2.67 \pm 0.87$ | $0.42 \pm 0.03$  |
| FFBS | $1.22 \pm 0.49$ | $1.14 \pm 0.49$   | $2.30 \pm 0.83$ | $7.45 \pm 0.46$  |
| GTFF | $1.37 \pm 0.34$ | $1.24 \pm 0.35$   | $2.84 \pm 0.74$ | $16.50 \pm 1.00$ |



Kuva 5.4: Partikkelisuodattimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit ensimmäiselle reitille simulaatiossa karttatietoa käyttäen, kun  $N = 1000$ .

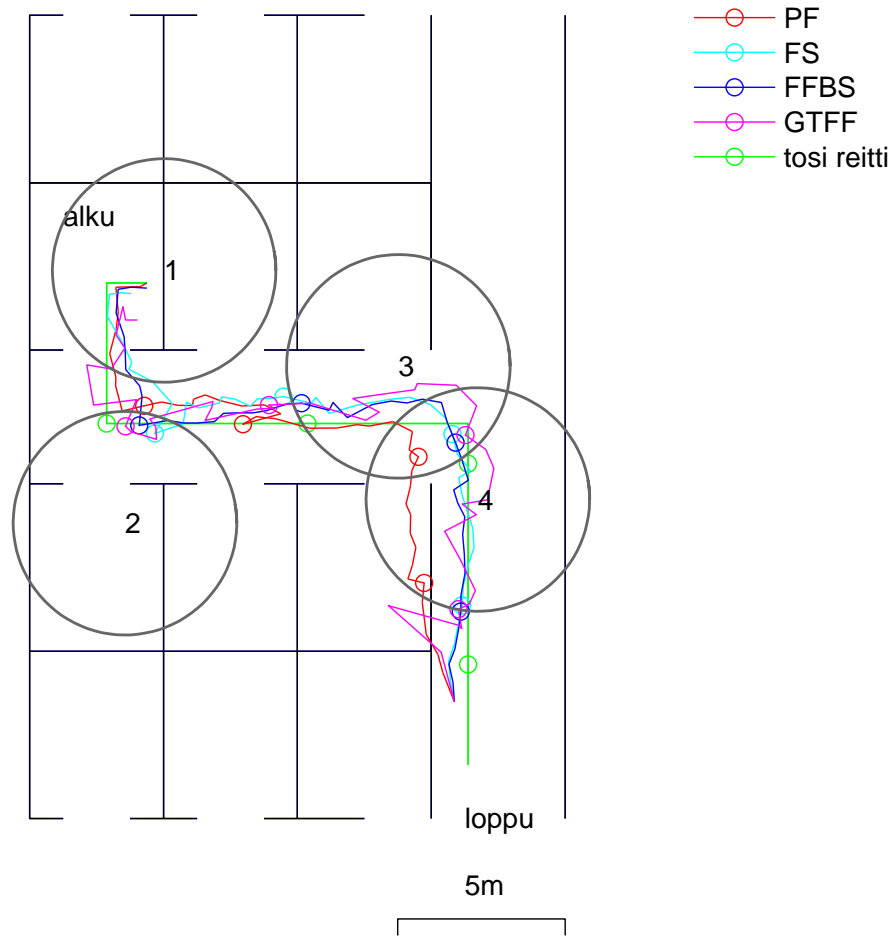
Taulukko 5.5: Paikannustulokset ensimmäisen testireitin 1000:n partikkelin simulaatiolle karttatietoa käyttäen.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]          |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| PF   | $1.52 \pm 0.15$ | $1.24 \pm 0.14$   | $3.79 \pm 0.56$ | $0.83 \pm 0.02$   |
| FS   | $0.87 \pm 0.13$ | $0.82 \pm 0.16$   | $1.52 \pm 0.25$ | $1.79 \pm 0.03$   |
| FFBS | $0.86 \pm 0.12$ | $0.82 \pm 0.15$   | $1.41 \pm 0.20$ | $73.20 \pm 2.06$  |
| GTFF | $0.95 \pm 0.11$ | $0.87 \pm 0.18$   | $1.80 \pm 0.18$ | $127.15 \pm 1.16$ |

Vertaamalla taulukoiden 5.2–5.5 tuloksia niin nähdään, että karttatietoa käyttäen pystytään kuljettu reitti estimoimaan huomattavasti paremmin. Kuvat 5.1–5.4 havainnollistavat myös samaa asiaa. Partikkelisuodattimen estimoima reitti ei kulje yhtä useasti seinän läpi, kun karttatieto huomioidaan. On hyvä huomata, että vaikka yksittäisten partikkelien painot asetettaisiin nolleen, niiden kulkiessa seinän läpi, niin posteriorijakaumaa kuvaavan partikkelipilven perusteella laskettu paikkaestimaatti saattaa kulkea silti seinän läpi. Kuitenkin karttatieto huomioon ottamalla jo 100:lla partikkelilla partikkelisiloitusmenetelmien keskivirheet ovat alle puolentoista metrin luokkaa ja 1000:lla partikkelilla keskivirhe putoaa alle metrin.

Karttatietoa käyttäen partikkelisiloittimia testataan myös hieman lyhyemmällä reitillä, jolla ajanhetkien lukumäärä on  $T = 45$ . Simulaatioiden tulokset on koottu taulukoihin 5.6 ja 5.7. Yksittäisten ajojen tulokset on piirretty sataa partikkelia käyttäen kuvassa 5.5 ja tuhatta partikkelia käyttäen kuvassa 5.6.

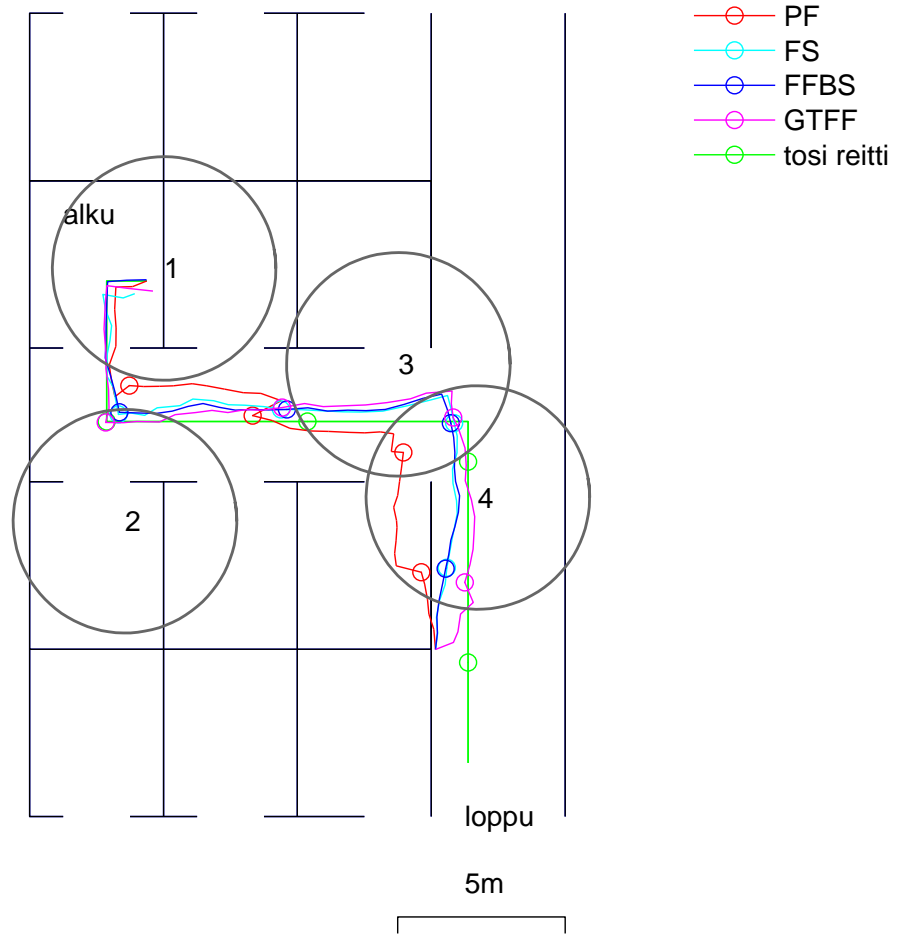




Kuva 5.5: Partikkelisuolettimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit toiselle reitille simulaatiossa karttatietoa käyttäen, kun  $N = 100$ . Kunkin menetelmän estimoimalla reitillä, joka kymmenes estimaatti on piirretty pallolla. Pallot vastaavat ajanhetkiä, jolloin saadaan WLAN-mittaus.

Taulukko 5.6: Paikannustulokset toisen testireitin 100:n partikkelin simulaatiolle karttatietoa käyttäen. Estimointimenetelmille on taulukoitu 100:n ajon keski- ja mediaanivirheiden, 95%-virhekvantiilien sekä laskenta-aikojen otoskeskiarvot sekä otoskeskihajonnat.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]        |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| PF   | $1.70 \pm 0.36$ | $1.59 \pm 0.45$   | $3.69 \pm 0.98$ | $0.14 \pm 0.01$ |
| FS   | $1.57 \pm 0.39$ | $1.27 \pm 0.41$   | $3.53 \pm 1.11$ | $0.24 \pm 0.02$ |
| FFBS | $1.43 \pm 0.39$ | $1.10 \pm 0.44$   | $3.42 \pm 1.08$ | $4.17 \pm 0.29$ |
| GTFF | $1.56 \pm 0.36$ | $1.28 \pm 0.33$   | $3.69 \pm 1.22$ | $9.19 \pm 0.63$ |



Kuva 5.6: Partikkelisuodattimen, FS-, FFBS- ja GTFF-siloittimen paikkaestimaatit toiselle reitille simulaatiossa, kun  $N = 1000$ .

Taulukko 5.7: Paikannustulokset toisen testireitin 1000:n partikkelin simulaatiolle karttatietoa käyttäen.

|      | keskivirhe [m]  | mediaanivirhe [m] | 95%-virhe [m]   | aika [s]         |
|------|-----------------|-------------------|-----------------|------------------|
| PF   | $1.57 \pm 0.10$ | $1.47 \pm 0.20$   | $3.54 \pm 0.28$ | $0.48 \pm 0.01$  |
| FS   | $1.28 \pm 0.11$ | $0.70 \pm 0.12$   | $3.44 \pm 0.31$ | $1.05 \pm 0.01$  |
| FFBS | $1.19 \pm 0.10$ | $0.63 \pm 0.11$   | $3.33 \pm 0.30$ | $43.50 \pm 0.61$ |
| GTFF | $1.21 \pm 0.10$ | $0.80 \pm 0.13$   | $2.96 \pm 0.31$ | $74.54 \pm 0.45$ |

Kuvat 5.5 ja 5.6 havainnollistavat kuinka partikkelisiloitusta voidaan käyttää reitin siloittamiseen, kun partikkelisuodattimen estimaatti kulkee seinän läpi. Partikkelisuodattimen estimaatti harhautuu toimistoon kuvissa 5.5 ja 5.6, koska suuri osa partikkeleista siirtyy sinne. Partikkelisuodattimen estimaatti siirtyy reitin lopussa käytävälle, kun siellä olevat partikkelit saavat suuremman painon toimistoon kulkeneiden partikkelien törmätessä seinään. Painotuksen myötä partikkelisiloitusmenetelmien estimoima reitti kulkee käytävää pitkin. On tärkeää huomata, että partikkelisiloitusmenetelmien estimoimat reitit voivat myös kulkea seinän läpi. Vaikka partikkelisuodatukseen verrattuna partikkelisiloituksessa onkin käytössä lisäinformaatiota, niin tämä ei kuitenkaan automaattisesti takaa, että estimoitu reitti noudattaa sisätilakartan rajoitteita. Kuitenkin lisäinformaation myötä on mahdollista ottaa karttatieto tarkemmin huomioon.

## 5.5 Laskenta-aika ja muistinkulutus

Taulukon 5.2 tuloksista nähdään odotettu tulos, että SMC-menetelmien kuluttama laskenta-aika on suuri verrattuna Kalmanin suodattimeen ja RTS-siloittimeen. Lisäksi tarkastelemalla kaikkien simulaatioiden tuloksia (taulukot 5.2–5.7) nähdään, että partikkelisiloitusmenetelmistä FFBS, sekä GTFF ovat laskennallisesti raskaita menetelmiä verrattuna esimerkiksi FS:n, joka on laskenta-ajaltaan partikkelisuodattimen kanssa samaa suuruusluokkaa. FFBS ja GTFF menetelmien laskennallinen vaativuus onkin  $O(N^2T)$  ja FS:n  $O(NT)$ , kun  $N$  on partikkelien ja  $T$  ajanhetkien lukumäärä [9, s. 700]. Laskenta-aikojen tuloksiin vaikuttaa tietenkin laskenta-algoritmien ohjelmointi. Tässä työssä algoritmien optimointiin ei ole kiinnitetty erityistä huomiota, joten suuret laskenta-ajat saattavat osittain johtua kömpelöistä algoritmien toteutuksista. Sadan partikkelin simulaatioihin on tässä työssä käytetty MacBookia, jossa on 2 GHz Intel Core 2 Duo prosessori ja tuhannen partikkelin simulaatioissa iMacia 3.06 GHz Intel Core 3i prosessorilla. Voidaan arvioida, että FFBS- ja GTFF partikkelisiloitusmenetelmät ovat näiden simulaatioiden laskenta-aikojan tulosten perusteella vaikeasti hyödynnettäviä reaaliaikaisesti pienissä kannettavissa laitteissa kuten matkapuhelimissa, joiden prosessoriteho on rajallinen. Laskennan lisäksi kuljetun reitin visualisointi käyttäjälle, sekä muu matkapuhelimen toimintojen käyttö vie luonnollisesti oman osansa käytössä olevasta suorituskapasiteetista.

MATLABin profiler-ohjelmalla tarkasteltiin ensimmäisen reitin 1000:n partikkelin simulaatiossa karttarajoitteita käyttäen (taulukko 5.5, kuva 5.4), mihin suurin osa laskenta-ajasta kuluu. Yksittäisen simulaation perusteella partikkelisuodattimen ja FS-siloittimen laskenta-ajasta suurin yksittäinen osa kuluu karttarajoitteiden huomioimiseen. PF:lla noin 38% ja FS-siloittimella noin 22%. FFBS- ja GTFF-siloittimissa suurin osa laskenta-ajasta kuluu tiheysfunktioiden  $p(x_t|x_{t-1})$  laskemi-

seen. FFBS-siloittimen ajasta tähän kuluu noin 57% ja GTFF-siloittimen ajasta noin 64%.

Taulukkoon 5.8 on koottu tallennettavien partikkelien sekä painojen määrät eri partikkelisiloitusmenetelmille kiinteän välin siloituksessa.

Taulukko 5.8: Tallennettavien partikkelien ja painojen määrät eri partikkelisiloitusmenetelmille kiinteän välin siloituksessa.  $N$  viittaa partikkelisuodattimen käyttämään partikkelien määrään ja  $T$  ajanhetkien lukumäärään.

|      | partikkelit | painot |
|------|-------------|--------|
| FS   | $NT$        | $NT$   |
| FFBS | $NT$        | $NT$   |
| GTFF | $2NT$       | $2NT$  |

Partikkelisiloittimista FS ja FFBS edellyttävät suodatuksen partikkelien, sekä painojen tallentamista koko aikasarjalle. GTFF puolestaan edellyttää sekä aikasarjassa eteenpäin tapahtuvan suodatuksen, sekä aikasarjassa taaksepäin tapahtuvan suodatuksen partikkelien ja painojen tallentamisen. Lisäksi, jos keinotekoisina jakaumina käytetään suodatuksen posteriorijakaumia, kuten tässä työssä, niin GTFF siloitusta varten tallennetaan myös partikkelisuodatuksen posteriorijakaumien odotusarvot ja kovarianssimatriisit.

## 5.6 Mallit ja ehdokasjakaumat testeissä todellisilla mittauksilla

FFBS-partikkelisiloitinta testattiin myös todellisilla mittauksilla. Testaukset tehtiin suurelta osin Toni Fadjukoffin MATLAB-ohjelmistolla toteuttamalla paikannusjärjestelmällä. Askelten ja kulmanmuutosten mittaamiseen käytettiin Xsens MTw IMU-sensoria, josta löytyy kiihtyvyysanturi sekä gyroskooppi, joiden avulla pystytään mittaamaan askelmittauksia ja kulmanmuutos mittauksia [1]. WLAN-tukiasemien signaalin voimakkuuksia mitattiin Acer taulutietokoneelle tehdyllä ohjelmalla. Karttana käytetään TTY:n Tietotalosta muodostettua sisätilakarttaa. [10, s. 23, 24, 34]. Testitapauksissa askel- sekä kulmanmuutosmittauksia saadaan jatkuvasti reitin aikana.

WLAN-radiokartan muodostamiseksi mitattiin TTY:n Tietotalossa tukiasemien kuuluvuuksia ja kussakin mittauspisteessä tallennettiin kuultujen tukiasemien BSSID/MAC-tunnus sekä signaalin voimakkuus (RSS). WLAN-paikannukseen käytetään tässä signaalin vaimenemiseen (Path loss) perustuvaa mallia ja radiokar-

tan tukiasemien parametrien estimoinnissa käytetään artikkelin [26] menetelmiä. WLAN-mittauksia käytetään reitin estimoinnissa kymmenen sekunnin välein.

Reiteillä alkutilan kovarianssiksi asetetaan

$$P_0 = \begin{bmatrix} (2 \text{ m})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2 \text{ m})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (10^\circ \frac{\pi}{180^\circ})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.005 \text{ m})^2 \end{bmatrix}. \quad (5.6.1)$$

Tilamallina käytetään kaavan (4.1.3) mallia, sillä erotuksella, että paikkaan ei lisätä riippumatonta kohinaa  $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1:2}$ . Kulman ja askeleenpituuden kohinan kovarianssimatriisiksi asetetaan

$$Q_{t-1:4} = \begin{bmatrix} (1.5^\circ \frac{\pi}{180^\circ})^2 & 0 \\ 0 & (0.005 \text{ m})^2 \end{bmatrix}. \quad (5.6.2)$$

Mittausmallina WLAN-mittauksille käytetään kaavan (4.3.1) mallia. Ehdokasjakautamana käytetään jakaumaa  $p(x_t|x_{t-1})$ . Testaukset suoritetaan 400:lla partikkelilla ja uudelleennäytteistykseen kynnysarvona käytetään  $\text{ess}_k=20$ . Siloittimen ja suodattimen paikannustulosten vertailukelpoisuuden lisäämiseksi järjestysluvultaan vastaavat toistot siloittimella ja suodattimella tehdään käyttäen samaa satunnaislukusarjaa.

Vastaavasti kuten simulaatioissa, niin laskettaessa siloitusvaiheessa partikkeleille uusia painoja kaavan (3.5.9) mukaan, niin tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  arvoja laskettaessa ei huomioida uudelleen karttatietoa, vaan karttatieto huomioidaan suodatuksen painoissa  $W_t^i$ . Suodatuksen aikana seinien läpi kulkeneita partikkeleita painotetaan termillä  $\epsilon = 0.001$ . Tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  arvoja laskettaessa arvioidaan paikan kovarianssiksi

$$Q_{t-1:2} = \begin{bmatrix} (0.33 \text{ m})^2 & 0 \\ 0 & (0.33 \text{ m})^2 \end{bmatrix}. \quad (5.6.3)$$

Paikan kovarianssi valitaan näin, että siloitusvaiheessa uusia painoja  $W_{t|T}^i$  laskettaessa kullakin ajanhetkellä  $t$  moni partikkeli  $x_t^i$  saa merkittävästi nolasta poikkeavan painon. Lisäksi vastaavasti kuten simulaatioissa, niin liukulukuaritmetiikasta johtuen jakaumana  $p(x_t|x_{t-1})$  käytetään vakiohäntäistä jakaumaa. Mikäli partikkelisuodatin harhautuu reitin aikana käytetään sen uudelleen alustamiseen WLAN-mittauksia. Uudelleenalustus tehdään WLAN-mittauksen osoittamaan paikkaan, kun kaikkien partikkelien paino on nolla.

## 5.7 Partikkelisiloituksen testaaminen todellisilla mittauksilla

Paikannustulokset ensimmäiselle testireitille, jossa ajanhetkien lukumäärä on  $T = 502$ , esitetään taulukossa 5.9 ja kuvassa 5.7 on yksittäiset estimoidut reitit partikkelisuodattimelle, FFBS-partikkelisiloittimelle sekä staattista WLAN-paikannusta vastaava reitti.



Kuva 5.7: FFBS-partikkelisiloittimen ja partikkelisuodattimen estimoimat reitit TTY:n tietotalossa ensimmäisellä testireitillä. Pisteillä on merkitty paikkaestimaatteja kahdenkymmenen tilanpäivityksen välein. Kuvaan on myös piirretty staattista WLAN-paikannusta vastaava reitti.

Taulukko 5.9: Paikannustulokset partikkelisuodattimelle ja FFBS-siloittimelle ensimmäisellä testireitillä todellisia mittauksia käyttäen. Molemmille menetelmille on taulukoitu 100:n toiston keski- ja mediaanivirheet, sekä 90%- ja 95%-virhekvantiilit.

|      | keskivirhe      | mediaanivirhe   | 90%-virhe        | 95%-virhe        |
|------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| FFBS | $6.60 \pm 1.66$ | $5.60 \pm 2.08$ | $12.56 \pm 3.20$ | $15.76 \pm 3.13$ |
| PF   | $7.41 \pm 1.63$ | $6.45 \pm 2.03$ | $13.93 \pm 2.68$ | $17.02 \pm 2.15$ |

Testireitillä partikkelisiloittimen avulla päästään partikkelisuodattimeen verrattuna parempaan paikannustulokseen. Suurin ero suodattimen ja siloittimen välille syntyy reitin alussa, jossa suodattimen estimaatti on vähän aikaa väärällä käytävällä, kunnes WLAN-mittauksen ja uudelleennäytteistyksen myötä se siirtyy oikealle käytävälle (kuva 5.7). Seuraavassa kuvasarjassa 5.8 on havainnollistettu partikkelipilven käyttäytymistä aulasta käytävään siirryttäessä.





Kuva 5.8: Kuvasarjassa nähdään partikkelipilven käyttäytyminen sen siirtyessä au-  
lasta käytävään.

Kuvasarjan 5.8 ylimmästä kuvasta nähdään miten partikkelipilvi on levinnyt laajalle ennen käytävään siirtymistä ja keskimmaisessa kuvassa nähdään, kun suurin osa partikkeleista siirtyy väärälle käytävälle. Pieni osa partikkeleista menee kuitenkin oikealle käytävälle ja nämä partikkelit mahdollistavat tilaestimaatin siirtymisen oikealle käytävälle WLAN-mittauksen ja uudelleennäytteistyksen myötä, mikä nähdään kuvasarjan alimmassa kuvassa. Partikkelipilven jakaantuessa useampaan osaan FFBS-partikkelisiloitin pystyy siloittamaan suodattimen reittiä, mikäli suodatin harhautuu. Kun käytössä on tulevien ajanhetkien mittauksia, niin siloituksessa oikealla käytävällä oleva partikkelijoukko saa suuremman painon kuin väärällä käytävällä olevat, jolloin estimaatti saadaan oikealle käytävälle.

Toinen testireitti poikkeaa ensimmäisestä sen verran, että sen aikana poiketaan yhdessä luentosalissa. Toisella testireitillä ajanhetkien lukumäärä on  $T = 677$ . Paikannustulokset toiselta reitiltä on koottu taulukkoon 5.10 ja kuvassa 5.9 on esitetty yksittäisen simulaation partikkelisuodattimen ja FFBS-partikkelisiloittimen estimoidut reitit, sekä staattista WLAN-paikannuksta vastaava reitti.



Kuva 5.9: FFBS-partikkelisiloittimen ja partikkelisuolettimen estimoimat reitit TTY:n tietotalossa toisella testireitillä. Tässäkin kuvassa joka kahdeskymmenes tilan estimaatti on merkitty kuvaan pisteellä. Kuvaan on myös piirretty staattista WLAN-paikannusta vastaava reitti.

Taulukko 5.10: Paikannustulokset partikkelisuodattimelle ja FFBS-siloittimelle toisella testireitillä todellisia mittauksia käyttäen. Molemmille menetelmille on taulukoitu 100:n toiston keski- ja mediaanivirheet, sekä 90%- ja 95%-virhekvantiilit.

|      | keskivirhe      | mediaanivirhe   | 90%-virhe       | 95%-virhe        |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| FFBS | $4.39 \pm 0.78$ | $3.43 \pm 0.35$ | $9.80 \pm 3.42$ | $12.10 \pm 4.27$ |
| PF   | $4.36 \pm 0.72$ | $3.42 \pm 0.33$ | $9.74 \pm 3.31$ | $12.33 \pm 4.39$ |

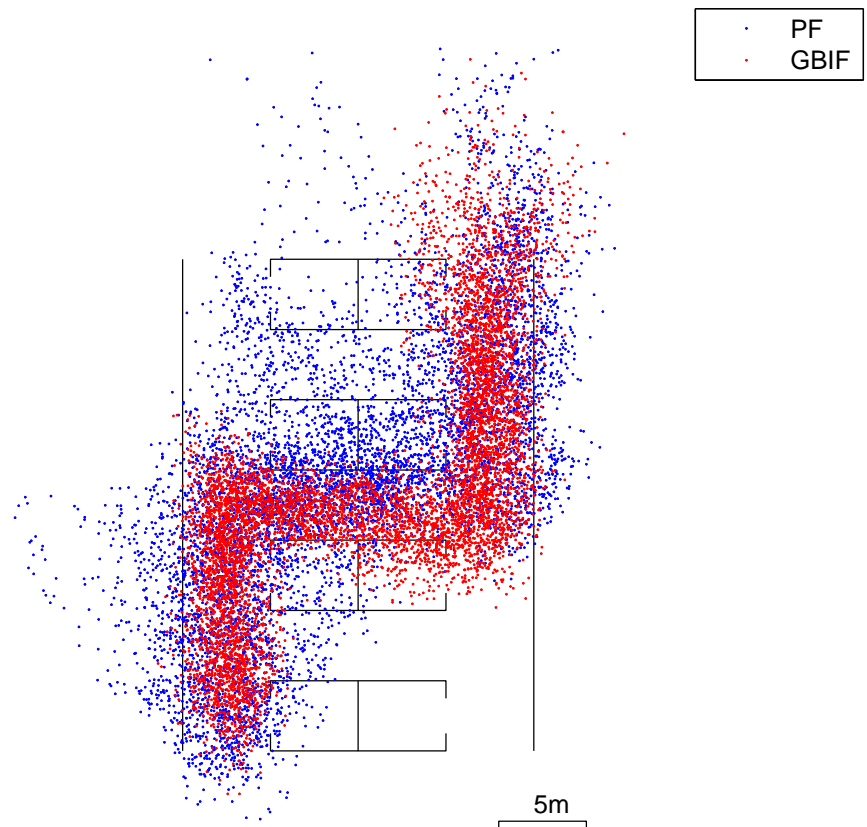
Toisella testireitillä suodattimen ja siloittimen estimoimat reitit ovat lähes identtiset kuvan 5.7 sekä virhekvantiilien (taulukko 5.9) perusteella. FFBS-partikkelisiloitin ei tässä pysty parantamaan partikkelisuodattimen estimaattia, sillä partikkelipilvi pysyy kasassa koko reitin ajan. Vastaavaa partikkelipilven jakaantumista mikä ensimmäisen testireitin alussa tapahtui ei tässä tapahdu.

## 5.8 Huomioita

Yksi tärkeä kriteeri ajanhetken  $t$  siloitusjakauman  $p(x_t|y_{1:T})$  estimoinnissa partikkelisiloitusmenetelmin on se, että siloitusjakauman partikkelipilvessä on mahdollisimman paljon eri partikkeleita, joilla on lisäksi merkittävästä nollasta poikkeava paino. Tällaisessa tilanteessa paikkaestimaatin konsistenttius on suurempi, kuin tilanteessa, jossa siloitusjakaumaa kuvaa samasta partikkelista monistettu partikkelipilvi tai partikkelipilvessä vain yhdellä partikkelilla on merkittävästi nollasta poikkeava paino. Teorian perusteella voidaan arvioida, että FFBS- ja GTFF-siloitusmenetelmissä paikkaestimaatin konsistenttius on suurempi kuin FS-partikkelisiloitusmenetelmällä varsinkin pitkässä aikasarjassa. Tämän työn simulaatioissa kaikki kolme edellä mainittua menetelmää antoivat hyvän paikkaestimaatin. Lisäksi olisi ollut hyvä tarkastella myös estimaattien konsistenttiutta. FFBS-, ja GTFF- siloitusmenetelmiä kannattaa käytännössä käyttää pitkässä aikasarjassa, jolloin FS:n estimaatti on huomattavan degeneroitunut. Sitä kuinka pitkällä aikavälillä FS-siloitin käytännössä degeneroituu olisi hyvä myös tarkastella.

Tämän työn testauksissa todellisilla mittauksilla paikkakoordinaattien varianssit valittiin niin, että FFBS-siloituksessa lasketut partikkelien uudet painot olivat monelle partikkelille nollasta poikkeavat. Tilamallin kovarianssimatriisissa oli siis suuremmat parametrit siloitusvaiheessa, kuin suodatusvaiheessa. Tämä ei siinä mielessä ole oikein, että suodatuksessa ja siloituksessa tulisi käyttää samaa tilamallia. FFBS- ja GTFF-siloitusta käytettäessä on kuitenkin käytettävä riittävän suurta varianssia paikkakoordinaateille, että tiheysfunktion  $p(x_t|x_{t-1})$  arvot ja sitä myöten painot  $W_{t|T}$  ovat nollasta poikkeavia monelle partikkelille. Tässä työssä tilamallin virhe on oletettu normaalijakautuneeksi. Paksuhäntäisempien jakaumien käyttöä ja sen vaikutusta FFBS- ja GTFF-siloitukseen olisi hyvä myös tutkia.

Kuten edellä mainittiin, niin GTFF-siloituksen toimivuuden kannalta on tärkeää valita ehdokasjakaumat  $q(x_t|x_{t-1}, y_t)$ ,  $\tilde{q}(x_t|x_{t+1}, y_t)$  ja keinotekoiset jakaumat  $\tilde{p}(x_t)$  siten, että partikkelipilvien todennäköisimmät alueet voidaan saada lähelle toisiaan. Ongelmia, joita syntyy mikäli suodatukseen aikasarjassa taaksepäin aiotaan käyttää ikään kuin tilamallille aikasarjassa käänteistä jakaumaa, on esitetty julkaisussa [5, s. 71]. Seuraavassa kuvassa 5.10 on piirretty kuvan 5.3 simulaation eteenpäin- ja taaksepäinsuodatuksen partikkelipilvet. Kuvasta nähdään, että partikkelipilvien todennäköisimmät alueet ovat lähellä toisiaan.



Kuva 5.10: PF:n ja GBIF:n partikkelipilvet ensimmäisellä simulaatioreitillä. Kuvan tapauksessa PF ja BIF käyttävät 100:aa partikkelia kunkin ajanhetken tilan posteriorijakauman approksimoimiseen ja huomioivat karttarajoitteet.

# Luku 6

## Yhteenveto

Tässä työssä tarkasteltiin kolmea partikkelisiloitusmenetelmää sisätilapaikannuksessa. Sovelletut menetelmät olivat suodatinsiloitin (filter-smoother, FS), eteenpäin suodatus taaksepäin siloitus (Forward Filtering-Backward Smoothing, FFBS), sekä yleistetty kahden suodattimen kaava (Generalized Two-filter Formula, GTFF). Kaikkia menetelmiä testattiin kolmessa simulaatiossa ja lisäksi FFBS-siloitinta testattiin kahdella eri reitillä oikeilla mittauksilla. Testaukset toteutettiin MATLAB-ohjelmistolla. Kaikissa testauksissa käytettiin kiinteän välin siloitusta (Fixed-interval smoothing), jossa partikkelisuodatus tehtiin ensin koko reitille ja tarvittavat tiedot tallennettiin siloitusta varten. Testauksissa oletettiin alkutilan, sekä oikean kerroksen olevan tiedossa.

Simulaatioissa, joissa ei huomioitu karttatietoa, havaittiin partikkelisiloitusmenetelmien estimoinnien reittien olevan lähellä analytyttistä Rauch-Tung-Striebel siloittimen ratkaisua partikkelien lukumäärän kasvaessa. Lisäksi huomattiin, että partikkelisiloitusmenetelmien avulla on mahdollista huomioida paremmin karttatieto reitin estimoinnissa partikkelisuodattimeen verrattuna. Työssä tehtiin myös huomioita partikkelisiloitusmenetelmien konsistenttiudesta, sekä käytännön toteutuksesta varsinkin FFBS-, sekä GTFF-siloitusmenetelmien osalta. Huomiota kiinnitettiin myös partikkelisiloitusmenetelmien laskenta-aikoihin, sekä muistinkulutukseen. Tiivistäen voidaan todeta, että laskentaintensiivisten menetelmien FFBS:n ja GTFF:n avulla on mahdollista ratkaista konsistentimpi siloitusjakauman (smoothed distribution) estimaatti pitkässä aikasarjassa. Nämä menetelmät ovat kuitenkin ainakin tällä hetkellä laskennallisesti niin raskaita, että esimerkiksi niiden käyttäminen reaaliaikaiseen paikannukseen kannettavissa laitteissa, kuten matkapuhelimissa, on hankalaa.

Tässä työssä partikkelisiloitusta on sovellettu sisätilapaikannukseen olettaen, että oikea alkupaikka, sekä alkusuunta, oikea kerros ja askelpituus ovat tiedossa. Nämä ovat oletuksia, jotka eivät kaikissa tilanteissa täyty. Muutamia jatkotutkimuksen aiheita voisivat olla 3D-partikkelisiloitus sekä partikkelisiloittimen hyödyntäminen ti-

lanteissa, joissa alkutilaa ei tunneta. Tämän työn tilamallissa käytettiin ohuthäntäistä normaalijakaumaa. Paksuhäntäisempien jakaumien vaikutusta paikkaestimaatin konsistenttiuteen olisi myös hyvä tutkia. Partikkelisiloitusmenetelmät toimivat sitä paremmin mitä konsistentimpi on partikkelisuodattimen estimaatti, joten myös partikkelisuodattimen toimintaan on tärkeää kiinnittää huomiota, mikäli halutaan saada hyviä tuloksia partikkelisiloituksella.

# Kirjallisuutta

- [1] URL <http://xsens.com/en/general/mti>, [viitattu 20.5.2013].
- [2] Ali-Löytty, S. Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa, Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto. 2004.
- [3] Ali-Löytty, S., Collin, J. ja Sirola N. Paikannuksen matematiikka, opintomoniste, Tampereen teknillinen yliopisto, 2010. URL <http://math.tut.fi/courses/MAT-45800>, [viitattu 20.5.2013].
- [4] Belloni, F., Ranki, V., Kainulainen, A. ja Richter, A. Angle-based indoor positioning system for open indoor environments. In *Positioning, Navigation and Communication, 2009. WPNC 2009. 6th Workshop on*.
- [5] Briers, M., Doucet, A. ja Maskell, S. Smoothing algorithms for state space models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62(61-89):197–208, 2010.
- [6] Challa, S., Morelande M.R., Musicki, D. ja Evans, R.J. *Object Tracking*. Cambridge University Press, 2011.
- [7] Collin, J. *Investigations of Self Contained Sensors for Personal Navigation*. PhD thesis, Tampere University of Technology, 2006.
- [8] Doucet, A., Godsill, S. ja Andrieu, C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10:197–208, 2000.
- [9] Doucet, A. ja Johansen, A. M. A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: 15 Years Later, in the *Oxford Handbook of Nonlinear Filtering*, Oxford University Press, 2011.
- [10] Fadjukoff, T. Karttarajoitteiden käyttäminen sisätilapaikannuksessa, Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2013. URL <http://dspace.cc.tut.fi/dpub/handle/123456789/21385>, [viitattu 20.5.2013].
- [11] Fearnhead, P., Wyncoll, D. ja Tawn, J. A sequential smoothing algorithm with linear computational cost. *Biometrika*, 97(2):447–464, 2010.



- [12] Fraser, D. ja Potter, J. The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 14(4):387 – 390, elokuu 1969.
- [13] Honkavirta, V., Perala, T., Ali-Loytty, S. ja Piche, R. A comparative survey of wlan location fingerprinting methods. In *Positioning, Navigation and Communication, 2009. WPNC 2009. 6th Workshop on*.
- [14] Hsu, H. P. *Probability, Random Variables and Random Processes*. McGraw-Hill, 1997.
- [15] Jazwinski, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Dover Publications Inc, 1970.
- [16] Kailath, T., Sayed, A.H., ja Hassibi, B. *Linear Estimation*. Prentice Hall, 2000.
- [17] Kaleva, O. Matemaattinen tilastotiede, opintomoniste, Tampereen teknillinen yliopisto, 2010.
- [18] Kemppi, P., Rautiainen, T., Ranki, V., Belloni, F. ja Pajunen, J. Hybrid positioning system combining angle-based localization, pedestrian dead reckoning and map filtering. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2010 International Conference on*.
- [19] Kessel, M. ja Werner, M. Automated wlan calibration with a backtracking particle filter. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2012 International Conference on*.
- [20] Khan, M. I. Design and Development of Indoor Positioning System for Portable Devices. Master's thesis, Luleå University of Technology, helmikuu 2013.
- [21] Kitagava, G. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(1-25), 1996.
- [22] Lukianto, C., Hönniger, C. ja Sternberg, H. Pedestrian smartphone-based indoor navigation using ultra portable sensory equipment. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2010 International Conference on*.
- [23] Mautz, R. Indoor Positioning Technologies, Habilitation Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, 2012.
- [24] Mezentsev, O., Collin, J. ja Lachapelle, G. Pedestrian dead reckoning-a solution to navigation in GPS signal degraded areas? *Geomatica*, 59(2):175–182, 2005.
- [25] Nieminen, T. *A Non-recursive Solution Method for Fixed-interval Smoothing Problems Applied to Short-term inertial Navigation*. PhD thesis, Tampere University of Technology, 2013.

- [26] Nurminen, H., Talvitie, J., Ali-Loytty, S., Muller, P., Lohan, E., Piche, R. ja Renfors, M. Statistical path loss parameter estimation and positioning using RSS measurements in indoor wireless networks. In *Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2012 International Conference on*.
- [27] Petrovich, D. Sequential Monte Carlo Methods for Personal Positioning. Master's thesis, Tampere University of Technology, 2006.
- [28] Ristic, B., Arulampalam, S. ja Gordon, N. *Beyond the Kalman Filter*. Artech House, 2004.
- [29] Särkkä, S. Bayesian estimation of time-varying systems: Discrete-Time systems, opintomoniste, Aalto yliopisto, 2012. URL [http://www.lce.hut.fi/~ssarkka/course\\_k2012/](http://www.lce.hut.fi/~ssarkka/course_k2012/), [viitattu 20.5.2012].
- [30] Terejanu, G. A. Crib: Sheet Linear Kalman Smoothing, State University of New York at Buffalo. URL <http://www.cse.sc.edu/~terejanu/tutorials.html>, [viitattu 20.5.2013].
- [31] Terejanu, G. A. Discrete Kalman Filter Tutorial, Tutorial paper, State University of New York at Buffalo. URL <http://www.cse.sc.edu/~terejanu/tutorials.html>, [viitattu 20.5.2013].
- [32] Widyawan, Klepal, M., and Beauregard, S. A backtracking particle filter for fusing building plans with PDR displacement estimates. In *Positioning, Navigation and Communication, 2008. WPNC 2008. 5th Workshop on*.

# Liite A

## Rauch-Tung-Striebel siloittimen todistus

**Lause 8.** *Oletetaan, että prosessin alkutilan jakauma sekä tila- ja mittausmalli ovat muotoa:*

*Alkutilan jakauma  $\mathbf{x}_0 \sim N(m_0, P_0)$*

*Tilamalli  $\mathbf{x}_t = F_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$ ,  $\mathbf{w}_{t-1} \sim N(0, Q_{t-1})$*

*Mittausmalli  $\mathbf{y}_t = H_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim N(0, R_t)$*

*Ajanhetken  $t$  tilan jakauma ehdolla edellisen ajanhetken  $t - 1$  tila voidaan kirjoittaa muodossa*

$$p(x_t|x_{t-1}) = N(x_t|F_{t-1}x_{t-1}, Q_{t-1}). \quad (\text{A.1})$$

Oletetaan lisäksi, että Kalmanin suodattimella saadaan ratkaistua seuraavat estimaatit:

$$\begin{aligned}
&\text{Priori} - \text{tilan odotusarvo } m_t^- = F_{t-1}m_{t-1} \\
&\text{Priori} - \text{tilan kovarianssimatriisi } P_t^- = F_{t-1}P_{t-1}F_{t-1}^T + Q_{t-1} \\
&\text{Posteriori} - \text{tilan odotusarvo } m_t = m_t^- + K_t(y_t - H_tm_t^-) \\
&\text{Posteriori} - \text{tilan kovarianssimatriisi } P_t = (I - K_tH_t)P_t^- \\
&\text{Kalmanin vahvistus } K_t = P_t^- H_t^T (H_t P_t^- H_t^T + R_t)^{-1}
\end{aligned}$$

missä kovarianssimatriisit ovat positiividefiniittejä. Ajanhetken  $t$  posteriorijakauma saadaan muotoon

$$p(x_t|y_{1:t}) = N(x_t|m_t, P_t). \quad (\text{A.2})$$

Tällöin RTS-silottimella saadaan ratkaistua jokaiselle ajanhetkelle  $t$  prosessin tilan jakauma ehdolla kaikki mittaukset  $y_{1:T}$ . Jakaumaksi saadaan

$$p(x_t|y_{1:T}) = N(x_t|m_t^s, P_t^s), \quad (\text{A.3})$$

missä

$$m_t^s = m_t + G_t(m_{t+1}^s - m_{t+1}^-) \quad (\text{A.4})$$

on jakauman odotusarvo ja

$$P_t^s = P_t + G_t(P_{t+1}^s - P_{t+1}^-)G_t^T \quad (\text{A.5})$$

jakauman kovarianssimatriisi, joka on positiividefiniitti. Silotus tehdään aikasarjassa taaksepäin alkaen ajanhetkeltä  $T$ , jolloin asetetaan  $m_T^s = m_T$  ja  $P_T^s = P_T$ .

*Todistus.* Todistetaan väite induktiolla aikasarjassa taaksepäin alkaen ajanhetkestä  $T$ . Todistuksessa käytetään apuna viitteessä [29, s. 97-98] esitettyä vastaavaa todistusta.

#### Alkuaskel:

Ajanhetkellä  $T$  väite on selvä, sillä silotusjakauma on muotoa  $p(x_T|y_{1:T}) = N_{n_x}(m_T^s, P_T^s)$  ja kovarianssimatriisi  $P_T^s$  on positiividefiniitti.

#### Induktio-oletus:

Oletetaan, että ajanhetken  $t + 1$  silotusjakauma on muotoa

$$p(x_{t+1}|y_{1:T}) = N(x_{t+1}|m_{t+1}^s, P_{t+1}^s), \quad (\text{A.6})$$

missä kovarianssimatriisi  $P_{t+1}^s$  on positiividefiniitti.

### Induktioaskel:

Todistetaan sitten, että ajanhetken  $t$  silotettu jakauma on muotoa (A.3). Lähdetään liikkeelle tilojen  $\mathbf{x}_t$  ja  $\mathbf{x}_{t+1}$  yhteisjakaumasta ehdolla kaikki mittaukset  $y_{1:T}$  ja kirjoitetaan oletusten perusteella yhdistetty jakauma sellaiseen muotoon, että apulauseen 9 avulla saadaan tilan  $\mathbf{x}_t$  jakauma ehdolla kaikki mittaukset, eli siloitettu jakauma.

Tilojen  $x_t$  ja  $x_{t+1}$  yhdistetty jakauma ehdolla kaikki mittaukset  $y_{1:T}$  voidaan ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla kirjoittaa muodossa

$$p(x_{t+1}, x_t|y_{1:T}) = p(x_t|x_{t+1}, y_{1:T})p(x_{t+1}|y_{1:T}), \quad (\text{A.7})$$

missä induktio-oletuksen nojalla  $p(x_{t+1}|y_{1:T}) = N(x_{t+1}|m_{t+1}^s, P_{t+1}^s)$ . Tarkastellaan seuraavaksi jakaumaa  $p(x_t|x_{t+1}, y_{1:T})$ . Käyttäen Markovin ominaisuutta aikasarjassa taaksepäin (kaava 2.2.2) saadaan

$$p(x_t|x_{t+1}, y_{1:T}) = p(x_t|x_{t+1}, y_{1:t}). \quad (\text{A.8})$$

Kirjoitetaan sitten ehdollisen todennäköisyyden määritelmän ja Markovin ominaisuuden (kaava 2.2.1) nojalla tilojen  $\mathbf{x}_t$  ja  $\mathbf{x}_{t+1}$  yhteisjakauma ehdolla mittaukset  $y_{1:t}$  muotoon

$$p(x_t, x_{t+1}|y_{1:t}) = p(x_{t+1}|x_t, y_{1:t})p(x_t|y_{1:t}) \quad (\text{A.9})$$

$$= p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{1:t}). \quad (\text{A.10})$$

Oletusten nojalla  $p(x_{t+1}|x_t) = N(x_{t+1}|F_t x_t, Q_t)$  ja  $p(x_t|y_{1:t}) = N(x_t|m_t, P_t)$ . Apulauseen 9 nojalla saadaan

$$p(x_t, x_{t+1}|y_{1:T}) = p(x_t, x_{t+1}|y_{1:t}) = N\left(\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix} | m', P'\right), \quad (\text{A.11})$$

missä

$$m' = \begin{bmatrix} m_t \\ F_t m_t \end{bmatrix} \text{ ja } P' = \begin{bmatrix} P_t & P_t F_t^T \\ F_t P_t & F_t P_t F_t^T + Q_t \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Jakaumasta  $p(x_t, x_{t+1}|y_{1:T})$  saadaan apulauseen 10 avulla tilan  $x_t$  ehdollinen jakauma ehdolla  $x_{t+1}$

$$p(x_t|x_{t+1}, y_{1:T}) = N(x_t|m'', P''), \quad (\text{A.13})$$

missä

$$m'' = m_t + P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1} (x_{t+1} - F_t m_t) \quad (\text{A.14})$$

ja

$$P'' = P_t - P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1} (P_t F_t^T)^T. \quad (\text{A.15})$$

Merkitään vielä

$$G_t = P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1}, \quad (\text{A.16})$$

jolloin

$$m'' = m_t + G_t (x_{t+1} - F_t m_t). \quad (\text{A.17})$$

Kirjoitetaan vielä lausekkeen A.15 viimeinen termi hieman eri muodossa

$$P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1} (P_t F_t^T)^T \quad (\text{A.18})$$

$$= P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1} (F_t P_t F_t^T + Q_t) ((F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1})^T (P_t F_t^T)^T \quad (\text{A.19})$$

$$= P_t F_t^T (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1} (F_t P_t F_t^T + Q_t) ((P_t F_t^T) (F_t P_t F_t^T + Q_t)^{-1})^T, \quad (\text{A.20})$$

jolloin saadaan

$$P'' = P_t - G_t (F_t P_t F_t^T + Q_t) G_t^T. \quad (\text{A.21})$$

Nyt jakauma  $p(x_{t+1}, x_t | y_{1:T})$  voidaan (A.6) ja (A.13) perusteella kirjoittaa muodossa

$$p(x_{t+1}, x_t | y_{1:T}) = N(x_t | m'', P'') N(x_{t+1} | m_{t+1}^s, P_{t+1}^s) \quad (\text{A.22})$$

ja edelleen apulausetta 9 käyttäen saadaan

$$p(x_{t+1}, x_t | y_{1:T}) = N\left(\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix} | m''', P'''\right) \quad (\text{A.23})$$

missä

$$m''' = \begin{bmatrix} m_{t+1}^s \\ m_t + G_t (m_{t+1}^s - F_t m_t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$P''' = \begin{bmatrix} P_{t+1}^s & P_{t+1}^s G_t^T \\ G_t P_{t+1}^s & G_t P_{t+1}^s G_t^T + P'' \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Nyt apulauseen 9 avulla saadaan tilan  $\mathbf{x}_t$  silotusjakaumaksi

$$p(x_t | y_{1:T}) = N(x_t | m_t^s, P_t^s), \quad (\text{A.26})$$

missä

$$m_t^s = m_t + G_t(m_{t+1}^s - F_t m_t) \quad (\text{A.27})$$

ja

$$P_t^s = G_t P_{t+1}^s G_t^T + P'', \quad (\text{A.28})$$

jossa voidaan vielä kirjoittaa auki  $P''$ , jolloin saadaan

$$P_t^s = G_t P_{t+1}^s G_t^T + P_t - G_t(F_t P_t F_t^T + Q_t)G_t^T \quad (\text{A.29})$$

$$= P_t + G_t(P_{t+1}^s - F_t P_t F_t^T - Q_t)G_t^T. \quad (\text{A.30})$$

Näytetään vielä, että  $P_t^s$  on positiividefiniitti. Tarkastellaan lauseketta (A.28). Induktio-oletuksen nojalla  $P_{t+1}^s$  on positiividefiniitti, jolloin myös  $G_t P_{t+1}^s G_t^T$  on positiividefiniitti. Tällöin  $P_t^s$  on positiividefiniitti, jos voidaan näyttää, että  $P''$  on positiivisemidefiniitti tai positiividefiniitti. Kirjoitetaan  $P''$  käyttäen lauseketta (A.15) ja käänteismatriisilemmaa [16, s. 729] muotoon

$$P'' = ((P_t)^{-1} + F^T(Q_t)^{-1}F_t)^{-1}. \quad (\text{A.31})$$

Nyt koska matriisit  $P_t$  sekä  $Q_t$  ovat positiividefiniittejä ja positiividefiniitin matriisin käänteismatriisi on positiividefiniitti, niin  $P''$  on positiividefiniitti.

Induktioperiaatteen nojalla lause on todistettu.  $\square$

**Apulause 9.** Jos satunnaismuuttujan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  jakauma ja satunnaismuuttujan  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  ehdollinen jakauma ehdolla  $\mathbf{x}$  ovat

$$\mathbf{x} \sim N(\mathbf{x}|m, P) \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{y}|\mathbf{x} \sim N(\mathbf{y}|H\mathbf{x} + u, R), \quad (\text{A.33})$$

niin satunnaismuuttujien yhdistetty jakauma on muotoa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} m \\ Hm + u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P & PH^T \\ HP & HPH^T + R \end{bmatrix}\right) \quad (\text{A.34})$$

ja satunnaismuuttujan  $\mathbf{y}$  marginaalijakauma on muotoa

$$\mathbf{y} \sim N(Hm + u, HPH^T + R) \quad (\text{A.35})$$

[29, s. 119].

**Apulause 10.** Jos satunnaismuuttujien  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  yhdistetty jakauma on muotoa

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \sim N\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\right), \quad (\text{A.36})$$

niin satunnaismuuttujan  $\mathbf{x}$  ehdollinen jakauma ehdolla  $\mathbf{y}$  on muotoa

$$\mathbf{x}|\mathbf{y} \sim N(a + CB^{-1}(y - b), A - CB^{-1}C^T) \quad (\text{A.37})$$

[29, s. 119].